

MACLAURIN

Traité

DES

FLUXIONS

257

Volume I

FLA-2290

X





Esta obra es una reproducción digital de un ejemplar propiedad del CSIC y conservado en la biblioteca del Centro de Física "Miguel A. Catalán"

Podrá ser utilizada con fines de consulta, estudio o investigación, siempre que se respete la autoría y la integridad de la obra, en los términos previstos por la legislación vigente. No se permite en ningún caso el uso comercial de la obra, ni en todo ni en parte. Cualquier otra utilización deberá ser autorizada expresamente por el CSIC.

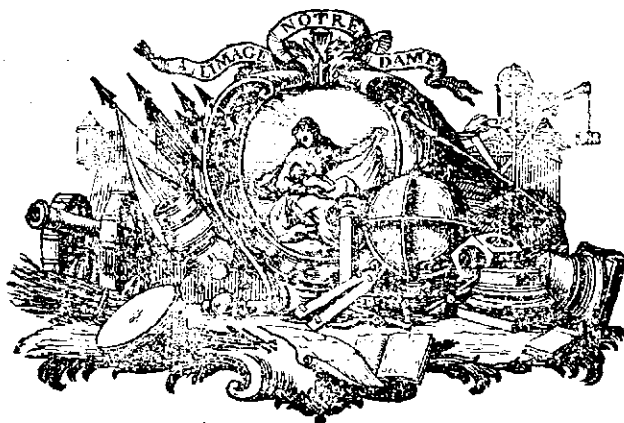
T R A I T É
D E S
F L U X I O N S.

Par M. COLIN MACLAURIN, Professeur
de Mathématique dans l'Université d'Edimbourg,
de la Société Royale de Londres.

TRADUIT DE L'ANGLAIS,

*Par le R. P. PEZENAS, Jésuite, Professeur Royal
d'Hydrographie à Marseille, de l'Académie des
beaux Arts de Lyon.*

T O M E S E C O N D.



L-729D



A PARIS, QUAY DES AUGUSTINS,
Chez CHARLES-ANTOINE JOMBERT, Libraire du Roi pour l'Artillerie
& le Génie, au coin de la rue Gille-cœur, à l'Image Notre-Dame.

M. DCC. XLIX.

Avec Approbation & Privilège du Roi.

T A B L E

Des Matieres contenues dans le second Volume.

SUITE DU LIVRE PREMIER.

CHAPITRE XII. *De la Méthode des infinimens petits. Des limites des rayons, & des Théorèmes généraux qui dérivent de cette doctrine, pour la resolution des problèmes Géométriques & Philosophiques, Page I*

De l'Analogie qu'il y a entre la Méthode des Fluxions & celle des infinimens petits, 2

Examen de quelques objections contre la Méthode des infinimens petits, 5

Raison pour laquelle on néglige une partie de l'élément dans la Méthode des infinimens petits, 7

De la Méthode de Newton par les limites des rayons, 9

Diverses Propositions des Chapitres précédens démontrées brièvement par cette Méthode, 12

Théorèmes touchant le centre de gravité & son mouvement, & leur usage pour la résolution de divers Problèmes sur le choc des corps, 14

De la descente des corps qui agissent les uns sur les autres; de la chute & de l'ascension de leur centre de gravité, & de la conservation de la force ascendante ou des forces vives, 26

Du centre d'oscillation, 38

Du mouvement de l'eau qui sort d'un vase cylindrique, 42

Du mouvement de l'eau qui sort d'un vase quelconque, 54

De la chaînette, quand la pesanteur agit par des paralleles, 56

Théorèmes généraux sur la propriété des trajectoires, des lignes de la plus vite descente, de la chaînette, &c. 63

CHAP. XIII. *Analyse du Problème concernant la plus vite descente, quand une pesanteur uniforme ou variable agit par des paralleles, 70*

<i>Démonstration synthétique du problème sur la nature des lignes de la plus vite descente ,</i>	74
<i>La même démonstration, lorsque la pesanteur est dirigée vers un centre donné ,</i>	76
<i>Autre démonstration synthétique ,</i>	80
<i>De la nature des lignes de la plus vite descente qui ont des circonférences égales, dans quelque hypothèse de pesanteur que ce soit ,</i>	84
<i>Le premier problème général isopérimètres résolu par les premières Fluxions , & sa solution démontrée par la synthèse ,</i>	86
<i>Le même problème rendu plus général en suivant la même Méthode ,</i>	89
<i>Solution du second problème général des isopérimètres par cette Méthode ,</i>	91
<i>La propriété du solide de moindre résistance démontrée de la même manière ,</i>	94
 CHAP. XIV. De l'ellipse considérée comme la section d'un cylindre : de la pesanteur vers les corps : de la figure de la Terre : du flux & reflux de la Mer ; de l'attraction , &c.	
	96
 <i>Propriétés générales des sections coniques , démontrées brièvement , & considérées comme étant la projection d'un cercle sur un plan oblique ,</i>	101
<i>De la gravitation vers des sphères & des sphéroïdes ,</i>	104
<i>La densité des Planetes étant supposée uniforme , leur figure est exactement celle d'un sphéroïde applati produit par une ellipse qui roule autour de son second axe ,</i>	113
<i>De la figure des Planetes & de la variation de la pesanteur à leur égard ,</i>	ibid.
<i>La pesanteur au pôle & à l'équateur , ou à quelque autre point que ce soit de la surface d'un sphéroïde , mesurée exactement par des arcs circulaires ou logarithmes ,</i>	115
<i>La pesanteur à l'axe du sphéroïde ou au plan de l'équateur , mesurée exactement par la même Méthode ,</i>	119
<i>De la figure de la Terre en particulier , supposant sa densité uniforme ,</i>	124
<i>De la pesanteur envers un sphéroïde dont la densité est supposée variable ,</i>	130

TABLE DES MATIERES.

v

<i>De la figure de la Terre en supposant sa densité variable ,</i>	140
<i>De la figure de Jupiter, & de l'effet de sa forme sphéroïde sur le mouvement de ses satellites ,</i>	143
<i>De la théorie des marées ,</i>	145
<i>Des autres loix de l'attraction ,</i>	151

LIVRE SECOND.

Des Calculs dans la Méthode des Fluxions.

CHAPITRE PREMIER. <i>Des Fluxions des quantités considérées abstractivement, ou comme étant représentées par les caractères généraux de l'Algebre ,</i>	153

<i>De l'importance de quelques signes Algebriques ,</i>	154
<i>Principes de cette Méthode appliqués à l'Algebre ,</i>	156
<i>Des Fluxions des puissances de toute espece ,</i>	160
<i>Des Fluxions des produits & des quotiens ,</i>	164
<i>Des Fluxions des logarithmes ,</i>	165
<i>Des secondes Fluxions & de celles d'un ordre plus élevé ,</i>	167

CHAP. II. <i>De la maniere d'exprimer les Fluxions ,</i>	169

<i>Regles de la Méthode directe ,</i>	170
<i>Regles fondamentales de la Méthode inverse des Fluxions ,</i>	175
<i>Des suites ou series infinies ,</i>	181
<i>Recherches sur les Théorèmes du binome & des multinomes ,</i>	183
<i>Autres Théorèmes généraux ,</i>	186
<i>Exemples de l'usage de ces Théorèmes ,</i>	188

CHAP. III. <i>De l'analogie entre les secteurs elliptiques & hyperboliques ,</i>	191

<i>Resolution des Trinomes en des diviseurs quadratiques ,</i>	199
<i>Reduction des fluentes en des arcs circulaires & logarithmiques , lorsque la Fluxion est exprimée par des quantités rationnelles ,</i>	203
<i>De la reduction des fluentes d'un ordre plus élevé en d'autres d'une forme plus simple ,</i>	218

<i>Maniere de reduire des fluentes par les mêmes regles lorsque la Fluxion renferme un binome ou un trinome irrationnel,</i>	222
<i>De la réduction des fluentes à des arcs hyperboliques & elliptiques,</i>	225
CHAP. IV. <i>De l'aire des figures quand leur ordonnée est exprimée par une fluente,</i>	236
<i>De l'aire quand l'ordonnée & la base sont exprimés par des fluentes,</i>	239
<i>Exemples de la maniere de mesurer le total de l'aire ou la fluente par des arcs circulaires ou des logarithmes, lorsqu'il ne paroît point que cette fluente puisse se reduire généralement aux mêmes mesures,</i>	241
<i>Théorèmes dérivés de la Méthode des Fluxions pour le calcul des sommes des progressions par les aires, & reciproquement,</i>	245
<i>Théorèmes pour trouver la somme d'une puissance, positive ou négative, des termes d'une progression arithmetique, & pour trouver les sommes de leurs logarithmes,</i>	248
<i>Resolution du problème concernant la raison de la somme de tous les coëfficiens de la puissance d'un binome au coëfficient du terme moyen,</i>	256
<i>Du calcul des aires par les ordonnées équidistantes,</i>	258
<i>Théorèmes dérivés de la Méthode des Fluxions pour interpoler les termes intermediaires des series,</i>	260
CHAP. V. <i>Des regles générales pour la resolution des Problèmes par les calculs, avec des exemples,</i>	264
<i>Regles pour déterminer les tangentes,</i>	ibid.
<i>Des plus grandes & des moindres ordonnées,</i>	265
<i>Des points d'inflexion & de rebroussement,</i>	270
<i>Du centre de courbure,</i>	272
<i>Des caustiques par reflexion & par refraction,</i>	274
<i>Des forces centripetes,</i>	ibid.
<i>Construction de la trajectoire décrite par une force qui est en raison inverse du maximum de la distance, par les logarithmes, pour des cas particuliers,</i>	278
<i>Dans ces deux cas un corps peut s'éloigner continuellement du centre sans jamais arriver à une certaine hauteur, ou il peut tou-</i>	

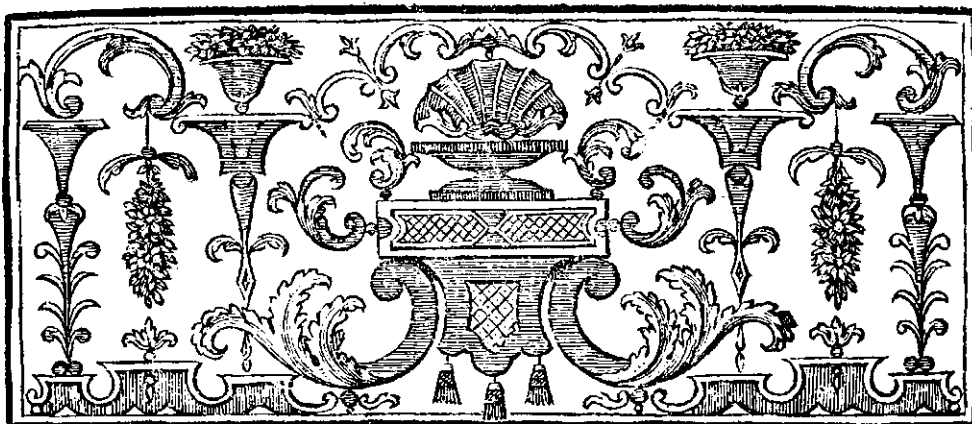
TABLE DES MATIERES. vij

<i>jours s'en approcher sans descendre plus bas qu'à une certaine distance ,</i>	279
<i>Construction de la trajectoire dans les autres cas ,</i>	ibid.
<i>Regles pour le calcul du tems de la descente le long d'une courbe donnée ,</i>	281
<i>Du tems de la descente dans un arc circulaire fini , mesuré par les arcs des sections coniques ,</i>	282
<i>Les mêmes regles par les series infinies ,</i>	283
<i>Regles concernant le calcul des mouvemens dans un milieu ,</i>	284
<i>Regles pour déterminer la figure de la chainette , & des lignes de la plus vite descente ,</i>	285
<i>Regles pour le calcul des solides , des arcs & des surfaces curvilignes ,</i>	ibid.
<i>Calcul des parties meridionales d'un sphéroïde par les arcs circulaires ou les logarithmes ,</i>	289
<i>Mesurer la pesanteur d'un sphéroïde au pôle ou à l'équateur par le moyen des arcs circulaires ou des logarithmes , quand l'attraction de ses particules est en raison inverse d'une puissance quelconque à sa distance ,</i>	292
<i>Des centres de gravité & d'oscillation des figures ,</i>	296
<i>De la proportion que la puissance doit avoir avec le poids à élever pour qu'une machine produise le plus grand effet possible dans un tems donné ,</i>	297
<i>De la même proportion en ayant égard au frottement ,</i>	298
<i>Trouver la position la plus avantageuse d'un plan qui se meut parallelement à lui-même suivant une direction donnée , pour qu'un courant puisse le choquer avec la plus grande force possible , la vitesse du courant & le plan étant donnés ,</i>	301
<i>Que le vent doit frapper les ailes d'un Moulin à vent sous un angle plus grand que celui de 54 degrés 44 minutes ,</i>	303
<i>La vitesse du vent & le vaisseau étant donnés , déterminer la situation la plus avantageuse des voiles , pour que le vent puisse pousser ce vaisseau avec la plus grande force , selon une direction donnée ,</i>	305
<i>Maniere de diviser un arc en un certain nombre de parties , en sorte que le produit de chaque puissance des sinus de ces parties soit un maximum ,</i>	308
<i>Trouver la route la plus avantageuse d'un Navire & la position de ses voiles , pour qu'il puisse s'éloigner d'une côte ou d'une ligne droite donnée aussi vite qu'il est possible ,</i>	309

<i>Méthode pour reduire les équations des secondes aux premieres Fluxions,</i>	311
<i>Construction de la courbe élastique, & d'autres figures semblables, par la rectification des sections coniques,</i>	313
<i>Des vibrations des cordes d'un instrument de musique,</i>	314
<i>Maniere de résoudre, par les premieres Fluxions seulement, les Problèmes concernant les maximum & les minimum proposés avec de nouvelles limitations, relatives à leur circonférence, à leur aire, au solide produit par leur aire, &c.</i>	317
<i>Exemples de Problèmes de cette espece sur le solide de moindre résistance,</i>	319
<i>Exemples de la maniere dont on peut appliquer les Théorèmes proposés dans l'article 563 pour découvrir l'équation d'une figure,</i>	320
<i>Théorème où l'on prouve que la valeur d'une ordonnée peut être déterminée par la valeur de son aire, par l'Algebre ordinaire,</i>	321
<i>Que l'étendue & le mouvement dont il est parlé dans cette Méthode des Fluxions sont considérés comme relatifs & non comme absolus,</i>	322

Fin de la Table du second Volume.





TRAITÉ DES FLUXIONS.



SUITE DU LIVRE PREMIER.

CHAPITRE XII.

*De la Méthode des Infiniment petits. Des limites des Rayons,
& des Théorèmes généraux dérivés de cette Méthode, pour
la résolution des Problèmes Géométriques & Philosophiques.*

495.



N expliquant la Méthode des Fluxions dans la première Partie de ce Traité, nous avons supposé que les grandeurs étoient formées par le mouvement, & en comparant les incréments produits dans les parties égales & successives du tems, nous avons d'abord examiné si le mouvement étoit uniforme, accéléré ou retardé. Lorsque le mouvement est uniforme, la Fluxion d'une grandeur est mesurée par l'incrément

Tome II,

A

qu'elle acquiert dans un tems donné. Lorsque le mouvement est accéléré, cet incrément est composé de deux parties; l'une, qui seule auroit été produite, si le mouvement n'avoit pas été accéléré, mais continué uniformément depuis le commencement du tems; & l'autre qui auroit été produite en conséquence de l'accélération continuelle du mouvement, pendant ce tems-là. Cette seconde partie a été rejetée, & on n'a retenu que la première pour mesurer le mouvement, au commencement du tems. Et de même, le mouvement étant retardé, la quantité qui s'est trouvée manquer, en conséquence de ce retardement, a été rejetée; en sorte que le mouvement, en chaque terme proposé, a été mesuré exactement, & que la raison des Fluxions a toujours été représentée avec exactitude. Dans la Méthode des infiniment petits, l'élément, par lequel une quantité croît ou décroît, est supposé infiniment petit, & on l'exprime, en général, par deux ou plusieurs termes, dont quelques-uns sont infiniment plus petits que les autres, lesquels étant négligés comme peu importants, les termes, qui restent forment, ce que l'on appelle la *différence* de la quantité proposée. Les termes que l'on néglige de cette manière, comme infiniment plus petits que les autres, sont les mêmes qui résultent de l'accélération, ou du retardement du mouvement générateur, pendant le tems infiniment petit de la production de cet élément, en sorte que les termes restans expriment l'élément qui auroit été produit dans ce tems-là, si le mouvement générateur avoit été continué uniformément. Donc ces différences sont *exactement* l'une à l'autre, en même raison que les mouvemens générateurs, ou Fluxions. Et par conséquent, quoique dans cette Méthode on néglige les parties infiniment petites des élémens, les conclusions qu'on en tire sont exactement vraies, même sans aucune erreur infiniment petite, & elles s'accordent précisément avec celles qui sont tirées de la Méthode des Fluxions. Par exemple*, dans la Proposition II. lorsque DG, incrément de la base AD du triangle ADE, est supposé devenir infiniment petit, le trapeze DGH E (incrément simultanée du triangle) est composé de deux parties, du parallélogramme EG & du triangle EIH; celui-ci est infiniment plus petit que le premier, parce que leur raison est celle de $\frac{1}{2}$ DG à AD. Donc, selon cette Méthode, on doit négliger la partie EIH, & le reste, qui est le parallélogramme EG, sera la différence du triangle ADE. Or, on a fait voir ci-devant,

Fig. 21.

* Les Figures citées du premier Vol. sont rejetées dans celui-ci. Planché I. Vol. II.

(article 93.) que EG est précisément la partie de l'incrément du triangle ADE , qui est produit par le mouvement avec lequel le triangle flue, & que EH est la partie du même incrément produite en conséquence de l'accélération de ce mouvement, pendant que la base, en fluant uniformément, acquiert l'augment DG , soit que DG soit supposée finie ou infiniment petite. Dans la Proposition III. premier cas, l'incrément $DELMHG$ du rectangle AE est composé des parallelogrammes EG , EM ; lorsque DG & LM , incréments des côtés, sont supposés infiniment petits; parce que Ib est à EG , comme LM est à AL & à EM , comme DG est à AD ; donc, en négligeant Ib , la somme des parallelogrammes EG & EM est la différence du rectangle AE : & l'on a fait voir dans l'article 102. que la somme EG & EM est l'espace qui auroit été produit par le mouvement avec lequel le rectangle AE flue, étant continué uniformément; mais que Ib est la partie de l'incrément du rectangle qui est produite en conséquence de l'accélération de ce mouvement, dans le tems que AD & AL , fluant uniformément, acquiert les augmens DG & LM . On doit observer la même chose sur les autres Propositions où l'on a ci-devant déterminé les Fluxions des quantités.

Fig. 221

496. En général, comme dans l'art. 66. si, pendant que P décrit la droite Aa d'un mouvement uniforme, M part de L avec la vitesse qui soit à la vitesse constante de P , comme Lc est à Dg , & s'avance dans la droite Ee , avec un mouvement qui soit continuellement accéléré ou retardé; si chaque espace LS , décrit par M , est toujours à DG , décrit par P , dans le même tems, comme Ls est à Dg ; si cx est à Dg , comme la différence des vitesses de M en S & L , à la vitesse constante de P , & si LS est toujours à LC , comme Ls à Lc : LS étant toujours exprimée par $LC \mp CS$, il est évident que (puisque LC est à DG , comme Lc est à Dg , ou comme la vitesse de M en L à la vitesse de P) LC fera ce qui auroit été parcouru par M , si son mouvement avoit été continué uniformément depuis L , & que CS , dans cette expression, vient en conséquence de l'accélération, ou du retardement du mouvement du point M , pendant qu'il décrit LS . Mais si LS & DG sont supposés des incréments infiniment petits de EL & AD , cx sera infiniment plus petit que Dg ; & puisque cs est moindre que cx , par ce qui a été démontré dans l'article 66. il suit que cs

Fig. 222

fera infiniment plus petit que Lc , & CS infiniment plus petit que LC . Donc, lorsque l'incrément LS est supposé infiniment petit, & que son expression est divisée en deux parties LC & CS , dont la première LC est toujours en même raison à DG , (incrément simultanée de AD) pendant que les incréments varient, & la seconde CS est infiniment plus petite que la première LC , nous pouvons conclure que la partie CS est celle qui est produite en conséquence de la variation du mouvement de M , pendant qu'il décrit LS , & que l'on doit, par conséquent, la négliger en mesurant le mouvement de M en L , ou la Fluxion de la droite EL . Ainsi la manière de trouver les différences, ou les Fluxions des quantités, dans la Méthode des infiniment petits, peut se tirer des principes de la Méthode des Fluxions démontrée ci-devant. Car, au lieu de négliger CS , comme étant infiniment plus petit que LC , (selon la manière de raisonner dans cette Méthode) nous pouvons la rejeter, parce qu'elle n'est pas produite en conséquence du mouvement générateur en L , mais seulement en conséquence des variations subséquentes de ce mouvement, par où l'on voit comment les conclusions de la Méthode des infiniment petits, ne doivent pas être représentées comme étant seulement approchantes de la vérité, mais comme étant exactement vraies.

497. Pour rendre l'application de cette Méthode plus aisée, on a admis certains principes analogues; par exemple, que les élémens infiniment petits d'une courbe sont des lignes droites, ou qu'une courbe est un polygone d'une infinité de côtés, lesquels, étant prolongés, forment les tangentes de la courbe, & par leur inclinaison mutuelle, mesurent sa courbure. C'est comme, si l'on supposoit que la base fluant uniformément, les ordonnées fluent par un mouvement qui est uniforme, pendant chaque partie infiniment petite du tems, & croissent ou décroissent par des différences infiniment petites à la fin de chaque tems. Mais quelque utile que soit ce principe, on doit l'appliquer avec précaution & avec sagesse en différentes occasions. On est donc en usage de diviser, en plusieurs cas, l'élément d'une courbe en deux ou plusieurs droites infiniment petites; mais quelquefois il est nécessaire (si l'on veut éviter l'erreur) de le diviser en un nombre infini de lignes droites, qui seront des infiniment petits du second ordre. En général, c'est un *postulatum* de cette Méthode que l'on peut descendre aux infiniment petits, d'autant d'or-

des qu'on le trouve nécessaire, pour découvrir & éviter, par ce moyen, toute erreur qui pourroit résulter de l'application de ce principe, en se servant à propos de cette Méthode. Ceci s'éclaircira par quelques exemples, où l'on prétend qu'elle conduit à l'erreur.

408. Le plus remarquable se tire de la science des pendu- Fig. 227.
le. Si l'on considère le cercle ABH , dont le diamètre AH est perpendiculaire à l'horizon, comme un polygone d'une infinité de côtés, & par conséquent l'arc infiniment petit AB , comme se confondant avec sa corde, il s'ensuivra que le tems de la vibration d'un pendule, dans cet arc, doit être égal au tems de sa descente dans sa corde, lequel est égal au tems de la chute, par le diamètre HA ; au lieu que si la raison de ces tems est assignable, elle doit être celle du quart de cercle au diamètre, comme on peut le démontrer, par l'article 408. Mais il est aisé de s'appercevoir que nous ne pouvons pas, dans ce cas, tirer nos conclusions des infiniment petits du premier ordre, puisque si nous supposons que le même arc se confond avec sa tangente AT , nous trouverons que le tems de la chute, dans cette tangente, doit être infini. Cette difficulté ne peut pas se résoudre (comme plusieurs autres) en réduisant l'arc infiniment petit, AB aux deux cordes infiniment petites BD & AD , ou à deux tangentes BC & AC , ou un nombre fini quelconque, de telles cordes ou tangentes. Le tems, dans la tangente BC , devoit être supposé la moitié du tems dans la corde BA , parce que BC est égal à CA , & que BDA étant supposé infiniment petit, BC est la moitié de BA , le tems de CA est la moitié du tems de BC , & par conséquent le tems de BC & CA est les trois quarts du tems de la corde BA , ou du diamètre HA , ce qui approche plus du vrai tems de l'arc BDA , mais ne lui est pas encore égal. En supposant l'arc BDA subdivisé continuellement de plus en plus, & que l'on mene des cordes & des tangentes, par chaque division, les tems dans les figures circonscrites & inscrites, approcheront continuellement du tems de l'arc, & à la fin y arriveront lorsque les divisions seront supposées infinies en nombre, de la même manière que les polygones inscrits & circonscrits, approchent du cercle & se confondent avec lui, lorsque le nombre de leurs côtés est supposé infini. Mais le tems d'un tel arc infiniment petit se détermine plus brièvement, en le considérant comme confondu avec le tems, dans l'arc

d'une cycloïde de même courbure, lequel a été déterminé dans l'article 408.

Fig. 122.

499. Lorsque l'on considère une courbe comme une polygone d'un nombre infini de côtés, & que CE , EH sont deux de ces côtés, si CE , prolongée, rencontre l'ordonnée GH en T , on suppose communément que CT est la tangente, & HT la soutendante de l'angle d'attouchement; si CL , EK , parallèles à la base, rencontrent les ordonnées DE , GH en L , & I , IT sera égale à LE , & TH à la différence de LE & IH qui sont les premières différences des ordonnées; ainsi HT soutendante de l'angle d'attouchement est souvent supposée, par les Auteurs de cette Méthode égale à la seconde différence des ordonnées: au lieu qu'il s'agit de ce qui a été démontré ci-devant, que l'arc étant diminué à l'infini, la soutendante de l'angle d'attouchement est égale seulement à la moitié de la seconde différence, ou seconde Fluxion de l'ordonnée. Mais il est visible qu'il n'y a pas lieu de supposer que la tangente de la courbe en E , se confonde plutôt avec l'un qu'avec l'autre des élémens CE , EH , & qu'on doit la considérer dans cette Méthode, comme également inclinée sur l'un & sur l'autre, ou plutôt comme formant avec chacun des angles infiniment petits, qui diffèrent, entre-eux, d'un angle infiniment plus petit que l'un des deux. Supposons donc la tangente tEt également inclinée à EC & EH , & qu'elle rencontre BC & GN en t & t ; la seconde différence de l'ordonnée (ou la différence de LE & IH) sera égale à $Ct + Ht$, ou $2Ht$, c'est-à-dire, à deux fois la soutendante de l'angle d'attouchement. Ceux, néanmoins qui considèrent la soutendante de cet angle, comme égale à la seconde différence de l'ordonnée, compensent cette erreur, en supposant cet angle double de ce qu'il est. Mais soit que l'on suppose que CE & EH sont des élémens rectilignes ou curvilignes de la figure, la soutendante de l'angle d'attouchement, doit être supposée égale seulement à la moitié de la seconde différence de l'ordonnée. Voyez l'article 254. si l'on veut comparer ces soutendantes à différentes distances du point d'attouchement, il vaut mieux considérer l'élément de la courbe comme un arc de cercle infiniment petit, excepté lorsque la courbure est de l'espece décrite dans les articles 377 & 378. qui sont, ou plus petites, ou plus grandes que celle d'aucun cercle. Ainsi lorsque le rayon de courbure est fini, les soutendan-

res du même angle d'attouchement sont en raison doublée des arcs ; mais dans les cas de ces articles , elles suivent d'autres proportions.

500. Lorsque la valeur d'une quantité requise dans un Problème Philosophique devient , en certains cas particuliers , infiniment grande , ou infiniment petite , la solution n'est pas toujours juste , quoiqu'on admette de telles grandeurs. Par exemple , s'il faut trouver par quelle force centripete , on peut décrire une courbe autour d'un point fixe , qui est ou dans la courbe , ou tellement situé , qu'on peut mener de ce point une tangente à la courbe , on trouve la valeur de cette force infinie au centre , dans le premier cas , & au point d'attouchement , dans le second ; cependant il est clair qu'une force infinie ne peut pas fléchir en ligne courbe la ligne décrite par un corps qui doit partir de l'un de ces points ; parce que la direction de son mouvement , dans l'un & l'autre cas , passe par le centre des forces , & qu'aucune force , quelque grande qu'elle soit , tendant vers ce centre , ne peut pas changer cette direction. Mais on doit observer que la grandeur Géométrique , par laquelle on mesure la force , n'est pas plus imaginaire , dans ce cas , que dans les autres où elle devient infinie ; & que les Problèmes Philosophiques ont des limitations , qui n'entrent pas toujours dans la solution générale donné par la Géométrie.

501. Mais pour ne pas citer d'autres exemples , ce que nous avons eu en vûe principalement , a été de faire voir comment on peut résoudre les difficultés qui se trouvent dans la Méthode expéditive des infiniment petits , & qui arrêtent ceux qui entrent dans la haute Géométrie , après s'être accoutumés aux démonstrations rigoureuses des élémens. Ils peuvent être surpris qu'en déterminant les premières différences , on rejette une partie de l'élément , précisément parce qu'elle est infiniment plus petite que le reste , ce qui doit leur paroître peu conforme à la parfaite exactitude , qui est requise dans une démonstration Géométrique ; d'autant plus qu'on emploie , dans la suite , cette même partie pour déterminer les secondes différences & les suivantes , & pour résoudre les Problèmes les plus importants. Bien loin de dissiper ces difficultés , elles deviennent encore plus fortes , par la lecture des meilleurs Ouvrages qui ont été composés sur cette matière , & où les plus célèbres Ecrivains se sont exprimés avec le plus de précision , sur les quantités infiniment pe-

tites. On voit que les uns nient leur réalité, & ne les considèrent que comme des quantités incomparablement plus petites qu'aucune quantité finie, tout de même qu'un grain de sable est incomparablement plus petit que toute la terre; les autres les représentent comme des quantités, qui, dans tous leurs ordres, ne sont pas moins réelles que les quantités finies. C'est pour éviter tout ce qui peut donner des doutes de cette espece sur cette matiere, que nous avons suivi une Méthode moins concise, dans les Chapitres précédens de ce Traité, & que nous avons fait voir dans les articles 495 & 496. qu'on peut justifier la Méthode concise, qui est en usage au sujet des infiniment petits. Lorsque nous cherchons les premieres différences, nous pouvons rejeter les parties infiniment petites de l'élément, non pas précisément parce qu'elles sont infiniment plus petites que les autres parties; mais parce que les quantités & leurs relations mutuelles dépendent uniquement des mouvemens générateurs qui les font connoître: (articles 24, 33, 42, 43.) & parce qu'en mesurant ces mouvemens en chaque terme du tems, les parties infiniment petites de l'élément ne sont d'aucune considération, n'étant nullement produites, en conséquence de ces mouvemens, en eux-mêmes, mais seulement, en conséquence de leurs variations, depuis ce terme; comme on l'a démontré au long, dans la Proposition II. & ses Corollaires, & en plusieurs autres endroits des Chapitres précédens. Les mêmes parties infiniment petites, de ces élémens, servent néanmoins à mesurer l'accélération, ou le retardement du mouvement depuis ce terme, ou les forces qui sont conçues l'accélérer, ou le retarder en ce terme: & ici on néglige les parties infiniment petites de cet élément, qui sont du troisième ordre, par une semblable raison, étant produites uniquement, en conséquence de la variation de ces forces, depuis ce terme du tems. De cette maniere, nous présumons qu'on peut donner quelque satisfaction aux plus scrupuleux, (qui sont arrêtés par la maniere ordinaire de raisonner dans cette Méthode) puisqu'on n'y néglige rien sans en rendre raison, & qu'ainsi l'on y voit une harmonie parfaite entre la Méthode des infinimens petits, & celle des Fluxions.

502. Mais quelques sûre & convenable que puisse être cette Méthode, quelques-uns auront toujours de la peine à admettre des quantités infiniment petites, & une infinité d'ordres d'infiniment

ment petits, dans une science qui se glorifie des principes les plus évidens & les plus exacts, & des démonstrations les plus rigides; c'est pour cela que nous avons mieux aimé établir une doctrine aussi utile & aussi étendue, dans les Chapitres précédens, sur des principes qui ne fussent sujets à aucune contestation. C'est pour éviter de pareilles suppositions que Newton considère comme finis les incréments simultanées des quantités fluentes; & qu'ensuite il cherche la raison qui est la limite des différentes proportions, que ces incréments ont les uns avec les autres, pendant qu'on les suppose décroître tous ensemble jusqu'à disparaître; cette raison est la même que celle des Fluxions, comme on l'a fait voir dans les articles 66, 67 & 68. Pour découvrir cette limite, il détermine d'abord la raison des incréments en général, & il la réduit aux termes les plus simples, en sorte qu'une partie, au moins, de chaque terme (généralement parlant) puisse être indépendante de la valeur des incréments eux-mêmes; ensuite supposant que les incréments décroissent jusqu'à disparaître, la limite se découvre aisément.

503. Par exemple, soit a une quantité constante, x variable, & o l'incrément de x ; les incréments simultanées de xx & ax seront $2xo + oo$ & ao , lesquels sont en même raison l'un à l'autre, que $2x + o$ est à a . Cette raison $2x + o$ à a décroît continuellement, pendant que o décroît, & elle est toujours plus grande que celle de $2x$ à a , pendant que o est un incrément réel, mais il est évident qu'elle approche continuellement de la raison de $2x$ à a , comme de sa limite; d'où il suit que la Fluxion de xx est à celle de ax , comme $2x$ est à a . Si l'on suppose que x flue uniformément, ax fluera, de même, uniformément, mais xx fluera d'un mouvement continuellement accéléré: on peut mesurer par ao le mouvement par lequel ax flue; mais celui par lequel xx flue, ne peut pas être mesuré par son incrément $2xo + oo$, (par l'Axiome I.) mais seulement par sa partie $2xo$, qui est produite en conséquence de ce mouvement; & la partie oo doit être rejetée, comme étant produite uniquement, en conséquence de l'accélération du mouvement, par lequel le carré variable flue, pendant que l'incrément o , de son côté est produit: & la raison de $2xo$ à ao est celle de $2x$ à a , que l'on a trouvé être la limite des incréments $2xo + oo$ & ao . En général, si (comme dans les articles 66 &c.) le point P est supposé parcourir DG sur une droite Aa Fig. 220;

d'un mouvement uniforme, & que M parcoure LS sur Ee d'un mouvement variable dans le même tems, si la vitesse de M en L est à la vitesse constante de P , comme Lc à Dg , & si Ls est toujours à Dg , comme LS à DG ; on a fait voir, dans ces articles, que si LS & DG (incrémens simultanées de EL & AD) sont supposés décroître jusques à disparoître, alors la raison de LS (ou $Lc \mp cs$) à Dg , ou de LS à DG , approchera continuellement de Lc à Dg , comme de sa limite. Donc si l'on détermine la raison qui est la limite des différentes proportions de LS à Dg , pendant que les incrémens LS & DG décroissent jusques à disparoître, cette raison ne peut pas être autre que celle de Lc à Dg , ou de la vitesse de M au terme où il part de L , à la vitesse constante de P , c'est-à-dire, de la Fluxion de EL à celle de ED . Si LC est à CS , comme Lc est à cs , LC fera la partie de $LC \mp CS$, (expression de LS) qui vient en conséquence du mouvement de M en L , & CS fera la partie qui vient de la variation du mouvement de M, pendant qu'il décrit LS .

504. On découvre cette limite par la même Méthode qui sert à distinguer les deux parties Lc & cs de $LC \mp CS$ expression de LS , ou LC & CS les deux parties de $LC \mp CS$ expression de LS , dont la première mesure le mouvement de M en L , pendant que la seconde vient de la variation du mouvement de M, dans le tems qu'il décrit LS . Nous avons distingué ces deux parties, par cette propriété, dans les Chapitres précédens. Mais puisque c'est la propriété de la partie cs de décroître, & à la fin de disparoître avec les incrémens LS & DG , pendant que Lc subsiste, il paroît que c'est une Méthode aussi juste qu'abrégée pour découvrir cette limite, de supposer que les incrémens décroissent, pour trouver quelle partie de LS décroît & s'évanouit enfin avec eux, afin de rejeter cette partie, & de rétenir seulement l'autre Lc , pour mesurer la vitesse de M en L . On a objecté, contre cette Méthode de Newton, pour trouver cette limite, qu'il suppose d'abord qu'il y a des incrémens, (comme LS & DG) & qu'en disant, *supposons que les incrémens disparaissent*, il détruit la première supposition, & cependant il retient une conséquence de cette supposition, c'est-à-dire, l'expression qui en résulte. Mais les suppositions que l'on fait dans cette Méthode, pour trouver la limite, ne sont pas aussi contradictoires que cette objection paroît le supposer. Il suppose d'a-

bord que les incréments sont produits, & il représente leur raison par celle de deux quantités, (comme Ls & Dg) dont l'une Dg est donnée, en sorte qu'elle ne varie point avec les incréments. S'il supposoit ensuite que les incréments n'ont pas été produits, ce seroit, à la vérité, une supposition directement contradictoire à la première. Mais lorsqu'il suppose que ces incréments diminuent jusques à disparaître, certainement on ne peut pas dire que cette supposition soit contraire à la première, ni qu'elle nous empêche de connoître quelle étoit la raison de ces incréments à chaque terme du tems, pendant qu'ils avoient une existence réelle, comment cette raison a varié, & de quelle limite elle a approché, pendant que les incréments étoient continuellement diminués : au contraire, c'est-là une Méthode très-abrégée & très-exacte pour découvrir la limite requise. Il a été aisé & utile de supposer que les mouvemens générateurs ont avancé dans leur course, & de substituer à la place de ses incréments décroissans des quantités qui doivent décroître, en sorte qu'elles soient toujours en même raison l'une à l'autre, que l'étoient les incréments, pendant qu'ils étoient produits. Mais cela n'étoit pas nécessaire, & l'on doit se souvenir que la raison de Lc à Dg , limite de la raison variable de Ls à Dg , n'est pas proposée comme la raison des incréments qui ont disparu, mais comme la raison des vitesses, par lesquelles les points M & P partent de L & D pour produire leurs incréments réels.

505. La raison de Lc à Dg est encore appelée *première raison* des incréments LS & DG ; parce que, quoique la raison de ces incréments varie continuellement lorsque le mouvement de M est continuellement accéléré ou retardé; cependant la raison des mouvemens générateurs (ou celle de Lc à Dg) est le terme ou la limite d'où part ou procède la raison variable des incréments pour croître ou décroître. Cette raison, à parler exactement, n'est pas celle d'aucun incrément réel quelconque, parce que tout incrément LS dépend en partie du mouvement de M en L , & en partie de l'accélération ou du retardement continuels de son mouvement, depuis ce terme. Mais comme la tangente d'un arc est une droite, qui limite la position de toutes les sécantes qui peuvent passer par le point d'atouchement, (article 181.) quoiqu'à la rigueur elle ne soit pas sécante, ainsi une raison peut limiter les raisons variables des incréments, quoiqu'elle ne soit pas la raison d'aucun incrément réel. On peut dire

de même, que la raison d'un mouvement générateur est la *derniere raison* des incréments lorsqu'on les suppose diminuer jusques à disparaître, & cela, par le même principe.

Fig. 38.

506. On peut démontrer brièvement, par cette Méthode, plusieurs Propositions des Chapitres précédens. Il suffit d'en donner quelques exemples. 1°. Reprenons la construction de l'article 140. où SA est constant; SA , AP & AL sont en proportion continuë, & où il est question de trouver la raison de la Fluxion de AL à celle de AP . Puisque Ll , incrément de AL , est à Pp , incrément de AP , comme DL est à SP , & que l'angle PSD est toujours égal à pSA , il est évident, que si l'on suppose que ces incréments Ll & Pp sont diminués jusques à disparaître, l'angle PSD approchera de PSA , & à la fin se confondra avec lui; PD deviendra égal à PL , & DL à $2PL$; en sorte que la dernière raison de Ll à Pp , sera celle de $2PL$ à SP , ou de $2AP$ à SA , & la Fluxion de AL sera à celle de AP en même raison. De même, SA , AP , AL & AM étant en proportion continuë, Mm , incrément de AM , est à Pp , comme GM à SP ; & lorsque ces incréments diminuent jusques à disparaître, GL devient égal à $2LM$, & GM à $3LM$; en sorte que la dernière raison de Mm à Pp est celle de $3LM$ à SP , ou de $3AL$ à SA , & la Fluxion de AM est à celle de AP en même raison. On conclut, de même, la huitième & neuvième Proposition.

Fig. 47.

507. Dans la Proposition XIV. où AD est la base, DE l'ordonnée, DG l'incrément de la base, IH l'incrément simultané de l'ordonnée, si l'on suppose DG diminuée jusques à disparaître l'angle HET (compris par la corde EH & la tangente ET) décroît jusques à disparaître, par l'article 181. & la dernière raison de DG à IH est celle de EI à IT , qui est par conséquent celle de la Fluxion de la base AD à la Fluxion de l'ordonnée. La dernière raison de l'arc EH à la tangente ET est une raison d'égalité, & la Fluxion de la courbe est à celle de la base, comme ET est à EI . On pourra, de même, prouver brièvement les Propositions XV, XVI & XVII.

Fig. 61.
& 62.

508. Dans la Proposition XVIII. un cercle décrit par C , E & K touche la droite AE , parce que l'angle ECK est fait égal à SEA . Donc, lorsque P approche de E jusques à se confondre avec E , la dernière raison de l'angle PKE à PCE est une raison d'égalité, & la dernière raison de l'angle PCE à

PSE est celle de SE à KE, ou de ST à CT; donc la Fluxion de l'angle ACP est à celle de aSP , comme ST est à CT.

509. Si l'on prend le point C sur la droite AB, qui joint les centres des corps A & B, enforte que CA soit à CB, comme le corps B est à A, C fera le centre de gravité de A & B; si l'on prend G sur CE, enforte que GE soit à GC, comme la somme des corps A & B est au corps E, G fera le centre de gravité des trois corps A, B & E, & l'on détermine, de même, le centre de gravité d'un nombre quelconque de corps. Soit kn une droite, Aa , Bb & Cc des paralleles menées de A, B & C, qui rencontrent kn en a , b & c ; la somme des rectangles sous A & Aa , & sous B & Bb , sera égale au rectangle sous A + B & Cc , lorsque A & B sont du même côté de kn , mais au rectangle sous A - B & Cc lorsqu'ils sont de différens côtés de kn ; parce que si AV & Bv, paralleles à Cc, rencontrent Bb & Aa en v & V, CV fera à Cv, comme CA à CB, ou comme B à A; & le rectangle A x CV sera égal à B x Cv. Il suit, que si G est le centre de gravité d'un nombre de corps, le rectangle sous G g (droite qui rencontre le plan donné kn en g) & sous la somme de tous les corps est égal à la somme des rectangles sous chaque corps, & sous la parallele menée de ce corps, & terminée toujours par kn , c'est-à-dire, à la somme de A x Aa , B x Bb , E x Ee , &c. en ramassant chaque rectangle, comme négatif, lorsqu'il n'est pas avec G du même côté de kn . De-là, on peut tirer le Corollaire VI. de la Proposition XIX. (que la surface décrite par une ligne FNf, roulant autour de l'axe kn , est égale au rectangle sous FNf & sous la ligne décrite par son centre de gravité C, dans le même tems) en appliquant ce qu'on a démontré des corps A, B, E, &c. aux élémens de l'arc FNf, & substituant cet arc à la somme des corps. On fera voir, de même, que si G est le centre de gravité d'une figure DBd, kn une droite dans le plan de cette figure, & donnée de position, GA perpendiculaire à kn , qui rencontre Mm ordonnée de cette figure parallele à kn en P, le solide sous l'aire DBd, & la perpendiculaire GA sera égale à la fluente du solide sous le rectangle qui mesure la Fluxion de l'aire MBm, & la perpendiculaire PA, en substituant les élémens de l'aire aux corps A, B, E, &c. & route l'aire DBd à la somme des corps; & si G est le centre de

Fig. 22j

Fig. 80.

Fig. 22j

gravité du solide DBd , dont Mm représente une section parallèle à Dd , soit le solide entier représenté par S , la Fluxion du solide MBm par s , $GA \times S$ sera égal à la fluente de $PA \times s$.

Fig. 124.

510. Il y a plusieurs Théorèmes touchant le centre de gravité, & son mouvement, qui sont utiles dans la résolution des Problèmes de différente espece; nous prendrons ici occasion d'en parler brièvement. Dans chaque Systême de corps la somme de leurs mouvemens, estimée dans une direction donnée, est égale au mouvement du corps qui est égal à la somme de ces corps, & qui s'avance avec la vitesse de leur centre commun de gravité, si ce mouvement est réduit à la même direction. Un mouvement, qui est comme CL , dans la direction CL , réduit à une autre direction Cc est mesuré par CP , si LP est perpendiculaire à Cc . Ce même mouvement, réduit à la direction opposée cC , est toujours mesuré par CP , mais on le considere alors comme négatif. Que les corps A & B avec leur centre de gravité se meuvent en même tems en F , H & L respectivement; que Ff , Hh & Ll , parallèles à Cc , rencontrent kn en f , h & l , & que FM , HN , LP , parallèles à kn , rencontrent Aa , Bb , Cc en M , N & P respectivement: puisque la somme de $A \times Aa + B \times Bb$ est égale à $\overline{A+B} \times Cc$, & que $A \times Ff + B \times Hh$ est égal à $\overline{A+B} \times Ll$, il suit que $A \times AM + B \times BN$ est égal à $\overline{A+B} \times CP$. De même $A \times FM + B \times HN$ est égal à $\overline{A+B} \times LP$. Et l'on voit, de même, que la somme des mouvemens d'un nombre de corps A , B , E , &c. est égale au mouvement de leur somme, qui part de leur commun centre de gravité, lorsque tous ces mouvemens sont réduits à une seule direction. Il suit, de même, que si les mouvemens des corps sont tous uniformes & rectilignes, leur centre de gravité est en repos où son mouvement est uniforme & rectiligne. Car, en ce cas, la raison des droites AM , FM , BN , HN les unes aux autres étant invariable, comme celle de A à B , la raison de CP à CL doit être invariable.

511. Comme la somme des mouvemens d'un nombre de corps réduits à une direction donnée, n'est jamais affectée par la composition, ou par la résolution de ces mouvemens, ou par les actions mutuelles & égales de ces corps l'un sur l'autre avec des directions opposées; ainsi le mouvement du centre de gravité

d'un Système de corps, n'est jamais affecté par leurs percussions, ou lorsqu'ils s'attirent, ou se repoussent l'un l'autre également. De même, comme le mouvement d'un corps continue d'être le même jusques à ce que quelque force extérieure, ou résistance l'affecte, par la première loi de mouvement de Newton; ainsi le mouvement du centre de gravité d'un Système de corps continue de même, à moins qu'il ne soit troublé par quelque influence étrangère. S'il y avoit une action, sans une réaction égale & contraire, l'état du centre de gravité du Système en seroit affecté. Et l'égalité de ces deux choses étant constamment confirmée par l'expérience, ce n'est pas sans fondement que Newton l'a prise pour une loi générale, & l'a étendue à la gravitation des corps. Il est évident néanmoins que ce n'est pas la somme des forces absolues des corps, sans égard aux directions de leurs mouvemens, qui se conserve la même, sans être altérée par leurs percussions, en conséquence de l'égalité de l'action & de la réaction*; (selon la troisième loi de mouvement de Newton,) puisque c'est là une loi générale qui s'étend aux corps mous, aussi-bien qu'à ceux qui sont parfaitement

* Lorsqu'on dit que la quantité de la force absolue est inaltérable dans la percussion des corps, & que cela suit si évidemment de l'égalité de l'action & de la réaction, que de tâcher de le démontrer, c'est vouloir le rendre plus obscur, il faut qu'on entende par action & réaction, quelque chose de plus que ce qu'on a entendu jusqu'ici, par ces termes, & qui n'ait pas été expliqué par ces Philosophes. Selon ces principes, il semble que l'égalité d'action & de réaction ne doit avoir lieu que dans la percussion des corps parfaitement élastiques, (c'est-à-dire, d'aucun des corps connus dans la nature) & qu'elle n'a pas même lieu dans ceux-là, à moins qu'on ne mesure leurs forces par la raison composée des carrés de leurs vitesses, & de leurs quantités de matières. Et quand même on admettroit cette mesure de la force des corps, on trouveroit la quantité de force absolue, tellement affectée par la percussion des corps, qu'elle seroit moindre pendant le petit espace du tems auquel ils agissent l'un sur l'autre, qu'elle ne l'est avant & après le choc; au lieu que la quantité de mouvement, estimée dans la même direction, se maintient la même, pendant que les corps agissent l'un sur l'autre, comme

devant & après, & qu'elle ne souffre jamais aucun changement, par leurs actions mutuelles. Mais comme ce seroit une digression mal placée, que d'insister ici sur ce sujet, j'ajouterai seulement un éclaircissement sur un argument qui a été proposé, il y a quelque tems, pour faire voir, qu'on ne peut pas abandonner l'ancienne doctrine, touchant la mesure des forces des corps en mouvement, sans changer les principes simples, qui ont été généralement reçus, touchant les actions des corps, & fondés sur les expériences les plus simples & les plus incontestables, pour leur substituer des notions, qui, au moins, paroissent très-obscurcs.

Soient A & B deux corps égaux séparés l'un de l'autre, par un ressort interposé (ou d'une autre manière équivalente) dans un espace EFGH, lequel dans le même tems, s'avance uniformément dans la direction BA (dans laquelle les ressorts agissent) avec une vitesse comme 1; supposons que les ressorts impriment sur les corps égaux A & B des vitesses égales dans des directions opposées, qui sont chacune comme 1. Alors la vitesse absolue de A (qui étoit comme 1) sera comme 2; & selon la nou-

Fig. 226.

élastiques, & qu'on ne peut pas dire que la somme des mouvemens absolus de ceux-ci soit inaltérable par leurs percussions. C'est la quantité de mouvement estimée dans la même direction qui se conserve la même, sans aucun changement dans les actions mutuelles des corps, en conséquence de l'égalité de l'action & de la réaction. Mais nous allons donner quelques exemples de l'usage de ces Théorèmes dans la résolution des Problèmes.

Fig. 227.

§ 12. Par ces principes, on peut aisément déterminer les effets de la percussion des corps. Les corps A & B étant supposés sans ressort, que C soit leur centre de gravité, & que leurs vitesses, avant le choc, soient représentées par AD & BD respectivement, si l'on suppose le choc direct, ils s'avanceront ensemble comme une seule masse, & par conséquent avec la vitesse CD de leur centre de gravité. Mais si les corps sont parfaitement élastiques; prenez CE égal à CD dans une direction opposée, & les vitesses de A & B après le choc, seront représentées par EA & EB respectivement, le changement produit par le choc dans leurs vitesses, étant en ce cas, double de ce qu'il étoit dans le premier, la différence de AD & CD étant

velle doctrine, la force comme 4; au lieu que la vitesse absolue & la force de B (qui étoit comme 1) sera détruite; en sorte que l'action des ressorts ajoute à A une force comme 3, & retranche du corps égal B, une force seulement comme 1; & cependant il paroît évident que les actions du ressort, sur ces corps égaux, doivent être égales. En général, si m représente la vitesse de l'espace EFGH dans la direction BA, n la vitesse ajoutée à celle de A & soustraite de celle de B par l'action du ressort, les vitesses absolues de A & B seront représentées par $m+n$ & $m-n$ respectivement, la force ajoutée à A, par le ressort, sera $2mn+nn$, & la force retranchée de B sera $2mn-nn$, qui diffèrent de $2nn$. De plus, on convient que les actions des corps, qui agissent l'un sur l'autre, sont les mêmes dans un espace qui s'avance d'un mouvement uniforme, que si cet espace étoit en repos, (*la force du choc, ou l'action des corps les uns sur les autres, dépend uniquement de leurs forces respectivement.* Discours sur le mouvement, Paris 1726.) Mais si l'espace EFGH étoit en repos, les forces communiquées par les ressorts à A &

B seroient égales, & la force de chacun auroit été représentée par nn . Ces argumens sont simples & familiers, & ils paroissent être les plus propres à traiter cette question. Quoiqu'il y ait certains effets produits par les forces des corps qui sont en raison doublée de leurs vitesses, nous ne pouvons pas conclure de là, que les forces, elles-mêmes, soient en cette raison, comme nous ne pouvons pas conclure qu'une force qui peut élever un corps à 500000 de hauteur, dans une minute, soit infinie, de ce qu'on peut démontrer (faisant abstraction de la résistance de l'air) qu'un corps jetté avec cette vitesse, s'élèvera toujours, & ne reviendra jamais à la terre. Et comme la réaction est seulement égale à l'action, lorsque toutes deux sont estimées dans des directions opposées sur la même droite, ainsi nous ne pourrons jamais estimer la force qu'un corps perd, ou acquiert par celle qui est produite ou détruite dans un autre corps, par une direction opposée; c'est par-là qu'on peut résoudre les objections que l'on fait contre la manière ordinaire de mesurer les forces des corps, & même trouver de nouvelles preuves pour la défendre.

égale

égale à celle de CD (ou CE) & EA , & la différence de CD & BD égale à la différence de EB & CD . Si B n'a point de mouvement avant le choc, on prend CE égal à CB , la vitesse de A avant le choc étant représentée par AB . En ce cas, si la droite oa est à ob , comme A est à B , & que ab soit divisée également en e , la vitesse de A avant le choc sera à celle de B après le choc, comme la moitié de la somme de A & B est à A , ou comme oe est à oa . Et si le mouvement est communiqué, de cette manière, du corps A à une suite de corps en progression Géométrique, de laquelle A & B sont les premiers termes, les vitesses communiquées successivement à ces corps, seront en progression Géométrique, & la raison commune de deux termes qui se suivent, sera celle de oe à oa ; & si n est le nombre des corps sans y comprendre le premier A , la vitesse du dernier sera à celle du premier comme la puissance de oa , dont l'exposant est n , est à la même puissance de oe . Donc, si od représente le dernier corps en progression, & ov la vitesse qui lui est communiquée, la vitesse du premier oa étant représentée par oa , & oa étant le module du système, le logarithme de od sera à celui de ov , comme le logarithme de ob est à celui de oe ; parce que le logarithme de od est à celui de ob , comme n est à 1, & que le logarithme de ov est à celui de oe en même raison.

513. Trois corps étant représentés par oa , ob & od , que le premier frappe le second, supposé en repos avant le choc, & que le second frappe le troisième en repos; que of soit à od , comme oa est à ob ; la vitesse communiquée de cette manière au troisième, sera à la vitesse du premier, comme oa est à un quart de la somme de oa , ob , of & od . Car la vitesse du premier oa est à celle du second ob , comme la somme de oa & ob est à $2oa$; la vitesse de ob est à celle de od , comme la somme de ob & od est à $2ob$; par conséquent du premier oa est à celle du troisième od en raison composée de $oa+ob$ à $2oa$, & de $ob+od$ à $2ob$, c'est-à-dire, (puisque oa , ob , of , od sont proportionnelles, en sorte que oa est à ob , comme $oa+of$ est à $ob+od$, & $oa+ob$ est à ob , comme la somme de oa , ob , of & od est à $ob+od$) comme la somme de oa , ob , of & od est à $4oa$. Ainsi la vitesse de ou étant donnée, celle qui est communiquée à od est réciproquement comme la somme de oa , ob , of & od , & est la plus grande lorsque cette somme est la plus petite; c'est-à-dire, si oa & od sont données, lorsque ob &

of se confondent l'une avec l'autre, & avec la moyenne proportionnelle entre *oa* & *od*. Donc la vitesse communiquée à *od* est la plus grande, lorsque le corps *ob* interposé entre *oa* & *od* est moyen proportionnel entre-eux. C'est-là un des Théorèmes de M. Huggens. D'où il suit, que plus il y aura de ces moyens Géométriques interposés entre *oa* & *od*, plus sera grande la vitesse communiquée à *od*.

514. Il y a cependant une limite où cette vitesse communiquée à *od*, ne peut jamais arriver, (les corps *oa*, *od* & la vitesse de *oa*, avant le choc, étant donnés) dont elle approche continuellement, pendant que le nombre de ces corps interposés entre *oa* & *od* augmente toujours. Et cette limite est une vitesse qui est à celle du premier corps *oa*, avant le choc en raison sous-doublée de *oa* à *od*. M. Huggens ne fait pas mention de cette limite, mais on peut la déterminer, par les articles 512 & 179. Car, pendant que *ab* diminue continuellement, & que *ob* approche de *oa*, la dernière raison du logarithme de *ob* à *ab*, ou du logarithme de *oe* à *ae* est une raison d'égalité, par l'article 179. par conséquent le logarithme de *ob* devient à la fin double de celui de *oe*, & (par l'article 512.) le logarithme de *od* double de celui de *ov*. Donc, si *ok* est un moyen proportionnel entre *oa* & *od*, le logarithme de *ov* deviendra égal au logarithme de *ok*, mais avec un signe contraire; en sorte que *ok*, *oa* & *ov* seront en proportion continue : & *ov*, vitesse du dernier corps *od*, sera à *oa*, vitesse du premier *oa*, comme *oa* est à *ok*, c'est-à-dire, en raison sous-doublée du premier *oa* au dernier *od*.

Fig. 228. 515. Les mêmes principes servent à déterminer les effets de la percussion, lorsqu'un corps frappe tout à la fois un nombre d'autres corps, avec des directions quelconques. Qu'ils soient tous d'abord parfaitement durs & sans ressort, le corps C se mouvant dans la direction CD, avec une vitesse représentée par CD, frappe tout-à-la fois les corps A, B, E, &c. qui sont supposés en repos avant le choc, dans les directions CF, CH, CK, &c. dans le même plan avec CD, & que Da, Db, De soient perpendiculaires à CF, CH, CK en a, b & e respectivement. Déterminez le point P, où le centre commun de gravité des corps C, A, B, E, &c. se trouveroit, si leurs centres étoient placés aux points C, a, b, e, &c. respectivement, par l'art. 509. joignez DP; CL, parallèle à DP, fera la direction du corps C après le choc. Que PR, perpendiculaire à DP, rencontre CD en R, & DL, perpendiculaire à CD, rencontre

CL en **L**; si l'on divise **CL** en **G** en sorte que **CG**, soit à **GL** en raison composée de celle de **CD** à **CR**, & de celle du corps **C** à la somme de tous les corps, la vitesse de **C**, après le choc, fera à sa vitesse, avant le choc, comme **CG** est à **CD**. Soient **Gf**, **Gh** & **Gk** respectivement perpendiculaires à **CF**, **CH** & **CK** en **f**, **h** & **k**, les vitesses de **A**, **B** & **E**, après le choc, seront représentées par **Cf**, **Ch** & **Ck**. Mais si nous supposons ces corps parfaitement élastiques, ou que les vitesses, relatives avant & après le choc, soient toujours égales, étant mesurées sur la même droite, prolongez **DG** jusques à ce que **Dg** soit égal à 2 **DG**; joignez **Cg**; le corps **C** décrira **Cg**, après le choc, dans le même tems qu'il auroit décrit une droite égale à **CD** avant le choc. Et l'on déterminera, de même, les mouvemens lorsque le ressort est imparfait, si la vitesse relative, après le choc, est toujours en raison donnée à la vitesse relative, avant le choc, dans la même ligne droite. M. Bernoulli a fait ses calculs des mouvemens dans les cas des corps parfaitement élastiques; & supposant qu'il y en eût d'un côté de la direction **CD** toujours respectivement égaux à ceux de l'autre côté, & poussés dans des directions à angles égaux avec **CD** dans le même plan, en se servant du principe que la somme des corps multipliés par les quarrés des vitesses est la même avant & après le choc. On trouvera que ces calculs s'accordent avec ce que nous avons démontré, en supposant que **DP** & **CL** tombent sur **CD**, & restreignant notre supposition en sorte qu'elle convienne à ce cas. Comme ces Problèmes passent pour être fort difficiles, il est bon de joindre ici la construction suivante, qui est toujours plus générale & tirée des principes des articles 510 & 511.

516. Que les corps **C**, **A**, **B**, **E**, &c. se meuvent maintenant dans les directions **CD**, **CF**, **CH**, **CK**, &c. dans un plan avec les vitesses représentées par **CD**, **Ca**, **Cb**, **Ce**, &c. & que le corps **C** les surmonte & les frappe tout à la fois dans ces directions. Que **T** soit le point où le centre commun de gravité de tous les corps **C**, **A**, **B**, **E**, &c. se trouveroit s'ils étoient placés en **D**, **a**, **b**, **e**, &c. respectivement; que **Ta**, **Tb**, **Te**, &c. soient perpendiculaires à **CF**, **CH**, **CK**, &c. en **a**, **b**, **e**, &c. **P** & le point où leur centre commun de gravité se trouveroit, si les corps étoient placés en **C**, **a**, **b**, **e**, &c. respectivement; joignez **TP**: **CL**, parallèle à **TP**, sera la direction de **C** après le choc, lorsque tous les corps sont supposés parfaite-

Fig. 2272

ment durs & sans ressort. Que PR , perpendiculaire à TP , rencontre CT en R , & TL , perpendiculaire à CT , rencontre CL en L ; que CS soit à CT , comme le corps C est à la somme de tous les corps; prenez sur CL , CG en même raison à CL que CT à $CS + CR$, CG représentera la vitesse de C après ce choc; par où l'on déterminera comme ci-devant, les vitesses des autres corps dans leurs directions respectives CF , CH , CK , &c. Nous omettons quelques autres Théorèmes de cette espèce, lorsque les directions sont en différens plans, parce qu'ils nous éloigneroient trop de notre principal objet. Lorsque les corps sont à ressort parfait, joignez DG , & prenez Dg double de DG ; mais si le ressort est imparfait, & que la vitesse respective, après le choc, soit en raison donnée à la vitesse respective avant le choc, prenez Gg à DG sur DG prolongée en cette raison donnée; Gg représentera la direction & la vitesse de C après le choc; par où il est aisé de déterminer les vitesses des autres corps. Les autres cas de ce Problème se tirent de la même manière du même principe.

Fig. 228.

517. M. Huggens a fait voir, que dans les percussions de deux corps qui sont parfaitement élastiques, la somme des corps multipliés par les quarrés de leurs vitesses est la même après le choc qu'auparavant. On a observé, avec raison, que cette Proposition générale pour toutes les percussions des corps à ressort parfait; mais comme elle ne résulte pas immédiatement de l'égalité d'action & de réaction, ainsi qu'on l'a remarqué ci-devant, & que quelques-uns l'ont regardée comme un Théorème d'un grand usage, nous allons faire voir comment on peut la démontrer lorsqu'un corps frappe tout à la fois un nombre d'autres corps, comme dans l'article 515. Soient DQ , gq , fm , hn , kr perpendiculaires à CG en Q , q , m , n & r . Les rectangles sous Cm & CG , Cn & CG , Cr & CG seront respectivement égaux aux quarrés de Cf , Ch & Ck . Si les corps C , A , B , E sont supposés sans ressort, leurs vitesses, après le choc, représentées par CG , Cf , Ch , & Ck , la vitesse, avant le choc, étant représentée par CD ; parce qu'en ce cas, le choc ne produit aucune vitesse relative dans leurs directions respectives; & la somme de $A \times Cm$, $B \times Cn$, $E \times Cr$ est égale à $C \times GQ$, parce que la somme des mouvemens qui seroient communiqués à A , B & E dans la direction CG , est égale au mouvement que C perdrait dans cette même direction, par l'art. 511. Donc la

Somme de $A \times C f^2$, $B \times C h^2$, $E \times C k^2$ est égale à $C \times C G \times G Q$,
 & si nous y ajoutons $C \times C G^2$, la somme de tous les corps, mul-
 tipliés par le quarré de leurs vitesses, sera, en ce cas, $C \times C G \times C Q$.
 Mais lorsque les corps sont supposés à ressort parfait, les vitesses
 de A, B & E sont représentées par $2 C f$, $2 C h$ & $2 C k$ respecti-
 vement; la somme de $A \times 4 C f^2$, $B \times 4 C h^2$ & $E \times 4 C k^2$ est
 égale à $C \times 4 C G \times G Q$, ou (*Elem.* 8. 2.) $C \times C Q^2 - C \times C q^2$;
 à quoi, si nous ajoutons $C \times C g^2$, (ou $C \times C q^2 + C \times D Q^2$)
 la somme des produits de chaque corps multiplié par le quarré
 de sa vitesse sera égale à $C \times D C^2$, & par conséquent la même
 après le choc qu'auparavant. Mais lorsque les corps sont sans
 ressort, cette somme est moindre après le choc qu'auparavant,
 en raison de $C G \times C Q$ à $C D^2$, ou de $C G$ à $C L$. On démon-
 tre, de même, cette Proposition pour les corps à ressort parfait
 dans le cas de l'article 516. & lorsque les corps A, B, E se
 meuvent avant le choc en des directions différentes de celles
 où C agit sur eux, la Proposition se démontre en réduisant leurs
 mouvemens à ceux qui sont dans ces directions, (qui seules sont
 affectées par le choc) & à ceux qui sont perpendiculaires à ces
 directions, par la 47^e du 1. d'Euclide. Cette Proposition a aussi
 lieu, lorsque les corps à ressort parfait, choque un obstacle
 insurmontable, aussi-bien que lorsqu'ils se choquent mutuelle-
 ment, ou lorsqu'ils sont contraints par une puissance, ou résistan-
 ce à se mouvoir dans des directions différentes de celles où ils
 se poussent l'un & l'autre, comme nous le ferons voir ci-après.
 Mais il est évident qu'on ne doit pas le prendre pour un prin-
 cipe général, ou loi de mouvement, puisqu'il n'a lieu que dans
 les percussions d'une seule espece de corps. Les solutions de
 quelques Problèmes qu'on a tiré de ce principe, peuvent se trou-
 ver d'une maniere générale & directe, par les principes simples
 qui sont universellement reconnus, en déterminant d'abord les
 mouvemens des corps durs qui sont supposés sans ressort, & ti-
 rant de là les résolutions des autres cas où les vitesses relatives,
 avant & après le choc, sont égales, ou en raison donnée. On di-
 ra peut-être qu'on ne connoît point de pareils corps dans la na-
 ture. Mais quoiqu'on n'en connoît point à ressort parfait, ni d'u-
 ne fluidité Mathématique, on ne laisse pas de regarder comme
 une recherche utile celle de leurs mouvemens. Il suit néant-
 moins de la Proposition que nous avons démontrée, que les corps
 à ressort parfait, se mouvant d'une maniere quelconque, si une

nouvelle force agissant sur eux, produit des vitesses égales dans la même direction sur chacun, l'excès de la somme des produits de chaque corps multiplié par le carré de sa vitesse, sur le produit de la somme des corps multipliée par le carré de la vitesse de leur centre commun de gravité, n'est pas affecté par cette nouvelle force, ou par leurs percussions.

Fig. 130.

§ 18. Supposons maintenant qu'un corps C se mouvant dans la direction CD avec la vitesse CD, pousse les corps A & B selon les directions CF & CH; mais que A & B ne pouvant se mouvoir dans ces directions, étant forcés de se mouvoir dans les directions respectives Cf & Ch, par des plans parallèles à Cf & Ch, le long desquels nous supposons qu'ils glissent sans frottement, ou parce qu'ils sont fixés aux extrémités des lignes OA & UB perpendiculaires à Cf & Ch, & mobiles autour des centres O & U, ou d'une autre manière équivalente. Supposons que toutes ces lignes soient dans le même plan que CD, & que A & B soient en repos avant le choc. Que Da & Db, perpendiculaires à CF & CH, rencontrent Cf & Ch en a & b respectivement; menez aF perpendiculaire à Ca, & bH à Cb, rencontrant CF & CH en F & H; & Fm, Hn, parallèles à CD, rencontrant Da & Db en m & n. Soit P le centre commun de gravité des corps C, A & B lorsque leurs centres respectifs sont supposés placés en C, m & n; joignez DP; CL, parallèle à DP, sera la direction de C après le choc, en supposant les corps parfaitement durs & sans ressort. Soit p le centre commun de gravité de C, A & B lorsque leurs centres respectifs sont supposés placés en D, F & H; menez pr, perpendiculaire à DP, rencontrant CD en r, soit CS à CD, comme le corps C à la somme de tous les corps; que DL, perpendiculaire à CD, rencontre CL en L, joignez rL, & que SG, parallèle à rL, rencontre CL en G; CG représentera la vitesse de C après le choc; & si Gf & Gh, respectivement perpendiculaire à CF & CH, rencontrent Cf & Ch en f & h, Cf & Ch représenteront les vitesses de A & B après le choc.

§ 19. Lorsque les corps sont à ressort parfait, Cg, direction & vitesse de C, se trouve, comme dans l'article 515. en prolongeant DG jusques à ce que Dg soit égal à 2 DG. En ce cas, quoique le mouvement du centre de gravité, ou la somme des mouvemens des corps dans la direction CD, soit diminuée par le choc, (à cause de la résistance des plans, ou lignes par les-

quelles les corps A & B sont empêché, de se mouvoir dans les directions CF & CH dans lesquelles C les pousse, & forcés de se mouvoir dans les directions Cf & Ch;) cependant la somme des produits des corps, multipliés par les quarrés de leurs vitesses, est la même après le choc qu'auparavant. Car que hs , perpendiculaire à Ch , rencontre CH en s , & fu , perpendiculaire à Cf , rencontre CF en u ; menez sx , uz , DQ & gq perpendiculaire à CL en x , z , Q & q ; joignez zf ; l'angle Cfz étant égal à Cuz , ou CGf , (le quadrilatere $Czuf$ pouvant être inscrit dans un cercle) les triangles Czf & CfG seront semblables, & le rectangle GCz égal au quarré de Cf . De même, le rectangle GCx est égal au quarré de Ch . Donc la somme de $A \times 4 Cf^2$ & $B \times 4 Ch^2$ est égale au produit de $A \times Cz + B \times Cx$ par $4 CG$. Mais $A \times Cz + B \times Cx$ est la quantité de mouvement que C perd dans la direction CL, lorsqu'il communique à A & B les vitesses Cf & Ch dans leurs directions respectives Cf & Ch en les poussant par les directions CF & CH, & par conséquent elle est égale à $C \times GQ$, par l'article 511. Donc, puisque $C \times GQ \times 4 CG$ est égal à $C \times CQ^2 - C \times Cq^2$, si l'on ajoute $C \times Cg^2$, la somme totale des produits des corps multipliés par les quarrés de leurs vitesses, après le choc, fera $C \times CD^2$, la même qu'elle étoit avant le choc; & il est évident que cette démonstration est applicable lorsque C frappe un nombre quelconque de corps, dans des directions quelconques.

520. La démonstration des constructions, dans les articles 515, 516 & 518. se trouvera aisément par celle de la première, dans l'article 515. Reprenant donc la construction de cet article, supposons néanmoins que Lp , Lq & Lt sont perpendiculaires à CF, CH & CK en p , q & t ; menez aM , pm , bN , qn , eZ , tz & PV perpendiculaires à CD en M , m , N , n , Z , z & V . Soit la somme de tous les corps C, A, B & E exprimée par S, & puisque P est le centre de gravité des corps C, A, B & E, lorsque leurs centres respectifs sont supposés placés en C, a , b & e , il suit, de l'article 509. que $S \times PV$ est égal à $A \times aM + E \times eZ - B \times bN$ & $S \times DV$ est égal à $C \times CD + A \times DM + B \times DN + E \times DZ$. Si l'on suppose ces corps sans ressort, ou que leurs percussions respectives n'ont produit aucune vitesse relative, alors C décrivant CL, les corps A, B, & E décriront des droites respectivement égales à Cp , Cq

Fig. 251.

& C*t*. Donc, si nous supposons que CL & CH sont d'un côté, & CF & CK de l'autre côté, $C \times DL + B \times qn$ sera égal à $A \times pm + E \times tz$, par l'article 510. parce que le centre de gravité des corps n'a point de mouvement dans la direction perpendiculaire CD avant le choc, & que par conséquent il n'en a point dans cette direction après le choc. Que L*p* rencontre en *r*, & que *pu*, parallèle à CD, rencontre a*M* en *u*, *au* sera à *ar*, (ou DL) comme DM à CD, & $au \times CD$ égal à $DL \times DM$, en sorte que $A \times CD \times pm$ sera égal à $A \times CD \times aM - A \times DM \times DL$. De même, $B \times CD \times qn$ sera égal à $B \times CD \times bN + B \times DN \times DL$ & $E \times CD \times ez$ égal à $E \times CD \times eZ - E \times DZ \times DL$. D'où il suit que $C \times CD \times DL + B \times CD \times bN + B \times DN \times DL$ est égal à $A \times CD \times aM - A \times DM \times DL + E \times CD \times eZ - E \times DZ \times DL$ ou $S \times DV \times DL$ égal à $S \times CD \times PV$. Donc CD est à DL, comme DV est à PV, & CL est parallèle à DP. La direction de C, après le choc, étant ainsi déterminée; supposons que CG soit à CD, comme la vitesse de C, après le choc, est à sa vitesse avant le choc; puisque la somme des mouvemens des corps estimés selon une direction donnée n'est pas affectée par le choc, ou que le mouvement de leur centre commun de gravité est uniforme, cette somme sera égale à $C \times CD$ dans le tems que C parcourt CG; & $C \times CD + A \times Cm + B \times Cn + E \times Cz$ sera à $C \times CD$, comme le tems où C décrit CL, au tems où il décrit CG, ou comme CL à CG. Donc, puisque $CD \times Mm$ est égal à $aM \times DL$, $CD \times Nn$ à $bN \times DL$, & $CD \times Zz$ à $eZ \times DL$, il suit que $A \times CD \times CM - A \times aM \times DL + B \times CD \times CN + B \times bN \times DL + E \times CD \times CZ - E \times eZ \times DL$ est à $C \times CD$, comme LG est à CG; c'est-à-dire, $S \times CD \times CV - S \times PV \times DL$ est à $C \times CD$, comme LG est à CG. Mais PR est perpendiculaire à DP par la construction, & CD est à DL, comme PV est à VR, ou $PV \times DL$ égal à $CD \times VR$. Donc $S \times CR$ est à $C \times CD$, comme LG à CG. Donc CG vitesse de C, après le choc, se détermine en divisant CL en G, en sorte que CG soit à LG en raison composée de CD à CR, & de C à S somme de tous les corps; ce qui est la solution donnée dans l'article 515. où les corps sont supposés sans ressort, en sorte que leurs directions respectives ne causent aucune vitesse relative de C & des autres corps. * On démon-

* Parce que les points *a*, *b*, *e*, &c. (Fig. 231. N. 2.) sont toujours dans la circonférence

tre de même dans le cas de l'article 516. que CS étant à CT, Fig. 119.
comme C est à S, CG est à CL, comme CT est à CS+CR.
Dans l'article 518. la somme des mouvemens estimés dans la

d'un cercle décrit sur le diamètre CD, si nous supposons qu'une Sphere C frappe des particules homogenes égales, qui la touchent dans un arc AB, qui est dans le même plan que CD, que la somme de ces particules soit nommée Q, que CA & CB rencontrent le cercle CaD en a & b, que X soit le centre de gravité de l'arc aDb, & que CX soit divisée en P, de sorte que CP soit à CX, comme Q est à C+Q, la direction de C, après le choc, sera parallèle à DP. Si AB est un demi-cercle divisé également par CD, le point X sera le centre du cercle CaD; & la vitesse, que C perd par le choc, sera à sa vitesse incidente comme Q est à 2C+Q. Mais parce que la résistance d'une Sphere dans un fluide ne se trouve pas de cette maniere. (Newton, Princip. Lib. II. Prop. XXXII. & Schol.) Nous n'avons pas insisté sur ces cas.

Ces Théorèmes étoient destinés pour un Traité sur la mesure des forces des corps en mouvement, & sur les effets de leurs percussions, écrit en 1728. (en forme de supplément à une petite piece imprimée, sur ce sujet, à Paris en 1724.) qui fut communiquée à plusieurs personnes, & qui devoit être rendu public. Je tâchois d'y démontrer, que selon le principe de ceux qui mesurent les forces des corps par les quarrés de leurs vitesses, des actions égales produisoient des forces inégales en tems égaux, & des forces égales en tems inégaux, que la force d'un corps n'auroit pas un plus grand effet dans la direction de son mouvement, que dans les autres directions, & qu'il faudroit admettre plusieurs autres suppositions contraires à ce qui a été généralement reçu. Mais ayant fait réflexion, que peut-être ceux, qui soutiennent cette opinion, admettroient ces conséquences en les expliquant, & qu'ils proposent souvent comme un Axiome, ou une définition, que la force d'un corps en mouvement se mesure par le nombre des ressorts qui peuvent la produire, ou la détruire; (quoique les mêmes ressorts agissent plus long-tems sur un grand corps que sur un petit, & qu'ils y produisent une plus grande quantité de mouvement,) je n'ai pas voulu m'engager dans une dispute embarrassée de pa-

reilles suppositions, & qui, après tout, ne paroît être qu'une question de mots. Un des principaux motifs de ce Chapitre, étant de donner quelques principes généraux, qui sont en usage pour la résolution des Problèmes, il m'a paru que c'étoit ici le lieu de publier ce qu'il y avoit de plus important dans ce Traité. Ainsi j'ai tâché de faire voir dans ces articles & les suivans, que la considération des mouvemens des corps durs, & sans ressort (qui a été rejetée en faveur de ce que l'on appelle loi de continuité, laquelle a été supposée générale avec peu de fondement) est utile pour avoir des solutions générales; que le principe, que M. Huggens appelle *conservatis vis ascendentis*, (dans ses observations sur quelques Ouvrages touchant le centre d'oscillation, Oper. Vol. I. p. 248. Edit. Lugd. Batav. 1724.) & qui paroît être le même que celui qu'on appelle aujourd'hui *conservation des forces vives*, a lieu en plusieurs cas, autres que ceux qu'il a examiné; & qu'il peut être utile dans plusieurs recherches, concernant les corps sans ressort, aussi-bien que dans celles sur les corps à ressort parfait; mais qu'il n'est pas général, & qu'on ne doit pas embarrasser la doctrine ordinaire, sur l'action & réaction des corps, ou la mesure de leurs forces en faveur de ce principe lorsqu'il a lieu. Ceux qui donnent ce principe pour une loi générale bornent trop cette théorie à une espece de corps, qui ne paroissent pas avoir sur les autres aucune prérogative. Et pendant que quelques-uns soutiennent avec plus de force contre Newton, la conservation de la même quantité de force absolue dans l'univers, ~~ils~~ se trouve qu'il n'y a point de proposition plus évidente dans la Philosophie expérimentale que celle-ci; sçavoir, qu'en plusieurs cas, la force est perdue ou diminuée par les percussions des corps, à cause de la foiblesse de leurs ressorts, soit que nous la mesurons par la vitesse; ou par le quarré de la vitesse. Et il y a lieu de croire que tout le monde n'avouera pas qu'il soit aussi facile, qu'on se l'imagine, de faire comprendre comment on peut faire accorder ces faits avec un principe qui leur est si contraire.

Fig. 230.

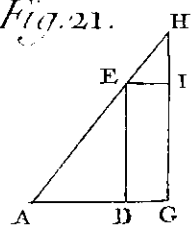
direction CD , n'est pas la même après le choc qu'auparavant; & pendant qu'un corps A acquiert la vitesse représentée par Cf dans la direction Cf , par l'impulsion de C dans la direction CF , nous devons supposer qu'en produisant ce mouvement, C perd un mouvement représenté par $A \times Cu$ dans la direction CF , fu , perpendiculaire à Cf en f , étant supposée rencontrer CF en u . Le mouvement $A \times fu$ se perd par la résistance du plan ou ligne qui force le corps A de se mouvoir dans la direction Cf , au lieu de celle de CF où il est poussé par le corps C . En réduisant les mouvemens $A \times fu$ & $B \times hs$ à la direction CD , & les ajoutant aux mouvemens de C , A & B dans cette direction après le choc, (ou plus brièvement en réduisant les mouvemens $A \times Cu$ & $B \times Cs$ à la même direction) & supposant la somme égale à $C \times CD$ qui étoit la somme des mouvemens en cette direction avant le choc, on trouvera la solution de l'article 518. Mais il faut maintenant faire voir que l'on peut appliquer ces Théorèmes aux corps qui descendent par leur gravité, & qui, en même-tems, poussent les autres corps, ce qui nous conduira à l'examen du principe de M. Huggens concernant la force ascendante.

Fig. 218.

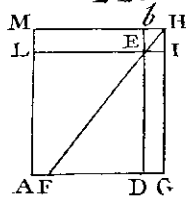
521. Soit la force accélératrice & la direction de la pesanteur toujours représentée par CD , & que C , par sa pesanteur, pousse A , B & E (que nous supposons à présent sans pesanteur) dans les directions respectives CF , CH & CK depuis le commencement de sa chute. Si rien n'empêche les corps de suivre ces directions, & si les côtés de A , B & E , que C pousse, sont des plans perpendiculaires à CF , CH & CK , (afin que C , pendant sa chute, puisse les pousser toujours dans les mêmes directions) C descendra dans la droite CL déterminée par l'article 515. car CL , direction de C déterminée dans cet article, ne dépend pas de la vitesse incidente de C , mais seulement de la quantité de matière dans tous les corps, de la direction du mouvement de C , & de celle par où elle agit sur les autres corps; & lorsque tout cela subsiste, la direction de C , après le choc, est toujours la même. Les forces, qui accélèrent les mouvemens de C , A , B & E dans les directions respectives CL , CF , CH & CK , sont à la force accélératrice de la pesanteur, & les vitesses respectives, qu'ils doivent acquérir, sont à la vitesse qu'un corps pourroit acquérir par sa pesanteur, en tombant librement dans la verticale CD , comme CG , Cf , Ch , & Ck à CD .

Figures répétées du Premier Volume.

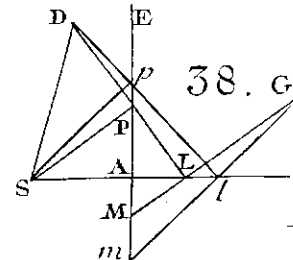
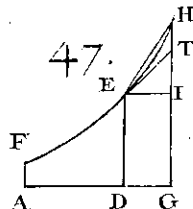
Fig. 21.



22.

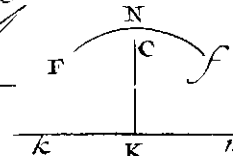


47.

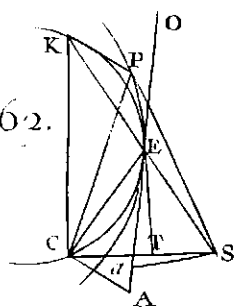


38.

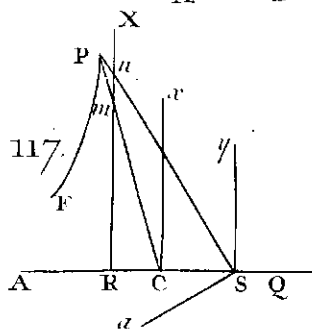
80.



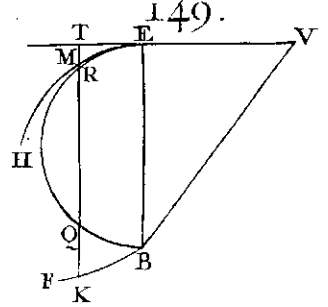
62.



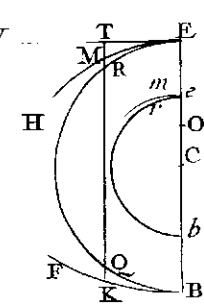
117.



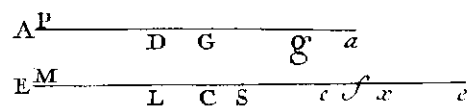
149.



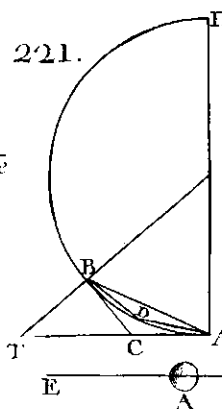
152.



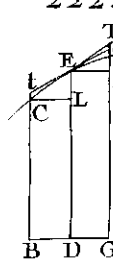
220.



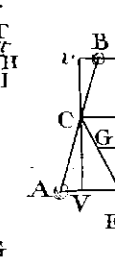
221.



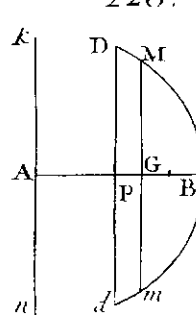
222.



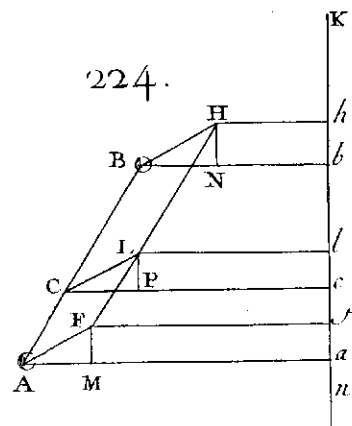
223.



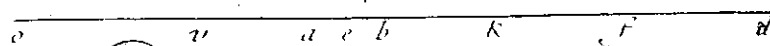
225.



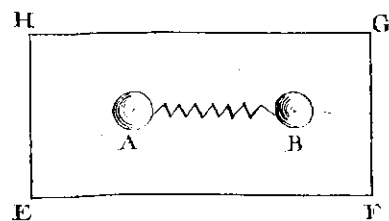
224.



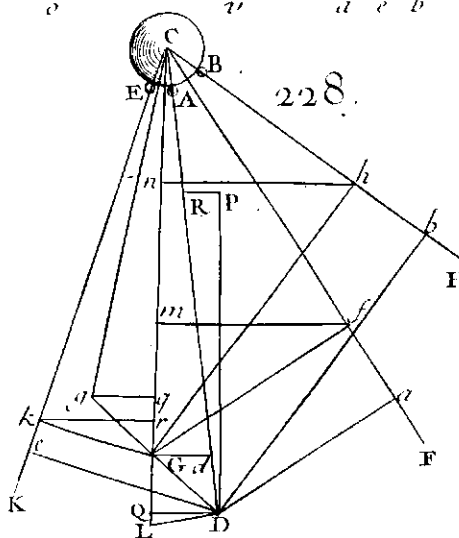
227



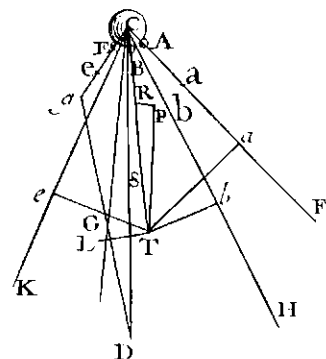
226.



228.



229.



Soit Gd , perpendiculaire à CD en d , la somme des produits $C \times CG^2$, $A \times Cf^2$, $B \times Ch^2$, $E \times Ck^2$ sera égale à $C \times CD \times Cd$; car on a fait voir dans l'article 517. que $C \times CG^2 + A \times Cf^2 + B \times Ch^2 + E \times Ck^2$ est égale à $C \times CG \times CQ$, qui (à cause que CG est à Cd , comme CD à CQ) est égale à $C \times CD \times Cd$; mais si la vitesse, que C acquiert pendant sa chute de C en G , & qui est accélérée par la force CG , est représentée par CG , ou son quarré par CG^2 , le quarré de la vitesse qu'il devoit acquérir, en tombant librement dans la verticale de C en d , par la pesanteur CD , sera représentée par $CD \times Cd$. (article 434.) Donc la somme des produits, qui viennent en multipliant chaque corps par le quarré de la vitesse qu'il acquiert, est égale au produit du corps C , (qui seul est supposé pesant) multiplié par le quarré de la vitesse qu'il auroit acquis en tombant librement de C en d , ou en descendant librement le long du plan incliné CG . Le même Théorème a lieu lorsque les directions, par où le corps C agit sur A , B & E dans la chute, varient, & la démonstration sera renfermée ci-après, dans un cas plus général.

522. Si le corps C pousse A & B , par sa pesanteur dans les directions CF & CH depuis le commencement de sa chute, mais que ces corps soient forcés, comme dans l'article 518. de se mouvoir dans les directions Cf & Ch , la direction du mouvement de C , & les vitesses, acquises par les corps respectifs, seront déterminées par ce qui a été démontré dans cet article, les côtés de A & B , sur lesquels C agit, étant des plans, tels que C puisse descendre dans la même droite CL , & pousse toujours A & B dans les mêmes directions CF & CH . Les vitesses acquises par C , A & B en G , f & h seront à la vitesse, qui seroit acquise dans un tems égal, par un corps qui tombe librement dans la perpendiculaire, comme CG , Cf & Ch à CD . Et parce que $C \times CG^2 + A \times Cf^2 + B \times Ch^2$ est égal à $C \times CG \times CQ$, (par ce qui a été démontré dans l'article 519.) ou à $C \times CD \times Cd$, Gd étant perpendiculaire à CD en d , il suit, que la somme des produits des corps multipliés par les quarrés des vitesses acquises, est, en ce cas, pareillement égale au produit de C , multiplié par le quarré de la vitesse qu'il auroit acquis par la même chute Cd s'il fût tombé librement dans la verticale CD .

523. Pour donner quelques exemples de ce dernier cas. Si

D ij

Fig. 230.

Fig. 232.
N. 1.

Le corps C pousse, par sa pesanteur, un corps A, seulement terminé par un plan perpendiculaire à CF, & que A glisse le long d'un plan parallèle à Cf sans frottement, soit Da, perpendiculaire à CF, qui rencontre Cf en a; que aF, perpendiculaire à Ca, rencontre CF en F, & que Fm, parallèle à CD, rencontre Da en m; sur Cm prenez CP à Cm, comme A est à C + A; joignez DP. La droite DG, parallèle à CF, coupera CL parallèle à DP en G. Si, dans ce cas, Cf est supposée horizontale, ou perpendiculaire à CD, Cm se confondra avec Ca, & CP étant prise sur Ca, en même raison à Ca, que A est à C + A, la droite menée de D parallèlement à CF, coupera CL parallèle à DP en G, en sorte que CG représentera la direction où C doit descendre, & la force qui accélère son mouvement, & il parcourra CG dans le même tems qu'il auroit parcouru CD, en tombant librement dans la verticale. Si

Fig. 232.
N. 2.

nous supposons que CF se confond avec la verticale CD; Da sera, en ce cas, perpendiculaire à CD, & aF étant perpendiculaire à Ca, le point m tombera sur D, & l'on divisera CD en G, de sorte que CG soit à DG en raison composée de C à A, & de CD à CF, ou du carré de CD au carré de Ca. Ces deux derniers cas ont été considérés par M. Bernoulli en dernier lieu, (*Comm. Acad. Petropol. Tom. V.*) & ces constructions s'accordent avec les calculs qu'il a fait en décomposant la force de C en deux progressions infinies. Si le corps C pousse, de même, deux corps égaux A & B dans les directions CF & CH, qui forment des angles égaux avec la verticale, & si fCh est une horizontale continuée, il faut diviser CD en G, de sorte que CG soit à GD en raison composée de C à la somme des corps A & B, & de la raison doublée du sinus de l'angle FCD à son cosinus; CG représentera la force qui accélère le mouvement de C, pourvu qu'il pousse toujours A & B dans les mêmes directions, depuis le commencement de sa chute.

Fig. 232.
N. 3.

524. Le reste subsistant comme dans l'article 523. supposons que les corps A & B gravitent aussi-bien que C. Dans ce cas, le corps C, pendant sa chute, n'aura point d'action sur les corps A & B, à moins que les angles DCf & DCh ne surpassent DCF & DCH respectivement. La force & la direction, avec laquelle C descend, étant représentée par CG, soient Gf & Gh perpendiculaires à CF & CH, (directions respectives où C agit sur A & B) qui rencontrent Cf & Ch en f & h; que

Fig. 233.

Cf & Ch représentent les forces, par lesquelles les mouvemens de A & B sont accélérés dans les directions Cf & Ch . Soient Da & Db perpendiculaires à Cf & Ch , qui rencontrent CF & CH en K & R respectivement; soit fk , perpendiculaire à Cf , qui rencontre CF en k , & hr , perpendiculaire à Ch , qui rencontre CH en r . Menez KM , km , RN & rn perpendiculaires à CG en M , m , N & n ; & menez Gd , fV & hv perpendiculaires à la verticale CD en D , V & v . Pendant que C décrit CG , A décrit Cf ; & parce que A auroit décrit Ca , dans le même tems, par sa propre pesanteur, la partie $A \times af$ de la force, qui produit le mouvement de A , est celle qui est produite en conséquence de l'action de C sur A ; la force que C perd dans la direction CF , (dans laquelle il agit sur A) en produisant cette augmentation de force de A dans la direction CF , est $A \times Kk$, laquelle, réduite à la direction CG , est $A \times Mm$. De même, la force que C perd dans la direction CG , par son action sur B , est $B \times Nn$. Soit DQ perpendiculaire à CG en Q , la force, par laquelle C s'efforce de descendre par CG en conséquence de sa pesanteur, étant $C \times CQ$, il suit que $C \times CG + A \times Mm + B \times Nn$ est égal à $C \times CQ$, & $C \times CG^2 + A.CG.Mm + B.CG.Nn = C.CQ.CG$. ou $C.CD.Cd$. Mais les triangles Cmf , CfG étant semblables, $Mm : af :: Cm : Cf$ ou $:: Cf : CG$ & $Mm.CG = Cf.af$ ou $= Cf^2 - Cf.Ca$, c'est-à-dire, (parce que $Cf : CV :: CD : Ca$ & $Cf.Ca = CD.CV$) $= Cf^2 - CD.CV$, & par la même raison $Nn.CG = Ch^2 - CD.Cv$. Donc $C.CG^2 + A.Cf^2 - A.CD.CV + B.Ch^2 - B.CD.Cv = C.CD.Cd$, ou $C.CG^2 + A.Cf^2 + B.Ch^2 = C.CD.Cd + A.CD.CV + B.CD.Cv$, c'est-à-dire, (par l'article 434.) la somme des produits de chaque corps, par le carré de sa vitesse acquise, est égale à la somme des produits de chaque corps multiplié par le carré de la vitesse qu'il auroit acquise, par la même chute perpendiculaire, s'il fût descendu librement. Mais on doit observer, que si un corps comme A (par exemple) monte, ou si l'angle DCf est obtus, af est $= Cf + Ca$, & le terme $A.CD.CV$ doit être soustrait dans la seconde partie de l'équation. Le Théorème général est donc, que la somme des produits des corps, multipliés par les carrés de leurs vitesses respectives, est égale à la différence des produits de ceux qui descendent multipliés, par les carrés des vitesses respectives qu'ils auroient acquis par les mêmes chûtes,

Fig. 233.
N. 2.

& des produits de ceux qui montent multipliés par les quarrés des vitesses respectives qu'ils auroient acquises, en tombant librement de la hauteur où ils se sont élevés. Pour donner un exemple de la maniere de déterminer ces mouvemens dans ce cas, supposons que C pousse les corps égaux A & B, dans des directions qui forment des angles égaux avec la verticale CD, & que ces corps se meuvent dans les directions Cf & Ch qui forment, de même, des angles égaux avec la verticale plus grands que DCF ou DCH. Soit Da, perpendiculaire à Cf en a, qui rencontre CF en K, que az, perpendiculaire à CF, rencontre CD en z, & soit KN perpendiculaire à CD en N. Que De, perpendiculaire à CF, rencontre Cf en e; divisez ae en f, de sorte que fe soit à af en raison composée de CN à Cz, & de la somme de A & B à C; Cf représentera la force qui accélère le mouvement de A ou B; & fG, perpendiculaire à CF, coupera CD en G, en sorte que CG représente la force qui accélère le mouvement de C. Que Kk, perpendiculaire à CF, rencontre Cf en k; si C agit sur un corps A seulement, il faut diviser ae en f, en sorte que fe : af :: A.Ck : C.Ca, & fG, perpendiculaire à CF, coupera DG parallèle à CF en G. Mais dans ces constructions, nous supposons que le corps C agit sur A & B par des directions invariables.

Fig. 233.
N. 3.

Fig. 234.

525. Ces mêmes Théorèmes ont lieu, quoique les côtés de A & B sur lesquels C agit ne soient pas plans, & que les directions, selon lesquelles ils sont poussés par C, varient; pourvu que C agisse sur eux depuis le commencement de sa chute, en sorte qu'il n'y ait ni percussion, ni subite communication de mouvement d'un corps à l'autre. Soit CG la direction de C dans un tems, qui rencontre Cf direction de A dans le même tems en C, & ch direction de B en c; soit CF la direction par laquelle C agit alors sur A, & cH celle par laquelle il agit sur B; & le reste de la construction étant semblable à celle du précédent article, que lG représente la force de la pesanteur le long du plan incliné CG, g la force par laquelle le mouvement de C est actuellement accéléré dans cette direction, k la force de la pesanteur le long du plan incliné Cf, & p la force additionnelle par laquelle l'action de C accélère le mouvement de A, l la force de la pesanteur le long de ch, & q la force ajoutée à celle-ci par l'action de C. Soit $P = k + p$ & $Q = l + q$. La force, que le corps C perd dans la direction CG, en agissant

sur A dans la direction CF, & produisant la force A. p dans la direction Cf, est A. $p. \frac{Cm}{Cf}$, ou A. $p. \frac{Cf}{CG}$; la force, que C perd dans la même direction CG, par son action sur B, est B. $q. \frac{cn}{ch}$, ou B. $q. \frac{ch}{CG}$. Donc C. $g + A. p. \frac{Cf}{CG} + B. q. \frac{ch}{CG} = C. G$. Si x, y & z représentent les Fluxions des espaces respectifs parcourus par C, A & B dans leurs mouvemens, x fera à y , comme CG est à Cf, & x à z , comme cG est à ch . Donc $Cgx + Apy + Bqz = CxG$, ou $Cgx + APy + BQz = CxG + Aky + Blz$. Mais si V, u & v représentent les vitesses respectives acquises par C, A & B aux points G, f & h , & I, K, L les vitesses respectives que les mêmes corps auroient acquis, en tombant librement des mêmes hauteurs d'où ils sont descendus, alors (article 434.) gx , Py & Qz représenteront les Fluxions de $\frac{1}{2}II$, $\frac{1}{2}KK$ & $\frac{1}{2}LL$. Donc, puisque nous supposons que ces vitesses commencent ensemble à être produites, $CVV + Auu + Bvv = CII + AKK + BLL$ soustrayant AKK ou BLL , lorsque A ou B montent, pendant que C descend. Il est clair que si l'on suppose le corps C, agisse sur un nombre de corps, ou que ceux-ci agissent sur d'autres corps avec des directions quelconques, le Théorème aura toujours lieu en prenant les sommes des produits de tous les corps qui agissent l'un sur l'autre, multipliés par les quarrés de leurs vitesses.

526. Si l'on suppose que les corps C, A & B montent de leurs lieux respectifs G, f & h avec les mouvemens qu'ils y avoient acquis, en sorte qu'ils ne soient retardés que par leur seule pesanteur, leur commun centre de gravité s'élèvera au même niveau d'où il est descendu. Car, soient X, Y & Z les hauteurs respectives où ces corps s'élèveroient de cette manière; H la hauteur, qui seroit parcourue par leur centre commun de gravité; h la hauteur qu'il parcourt en descendant; I, K & L les hauteurs respectives d'où ces corps descendent, & S la somme des corps; par le dernier article $CX + AY + BZ = CI + AK + BL$, & ces sommes sont respectivement égales à SH & Sh , par l'article 509. Donc $H = h$. Ces Théorèmes s'étendent également aux corps de toute espèce, à ceux qui sont sans ressort, comme à ceux qui ont quelque degré de ressort, n'y ayant point de vitesse relative, produite par C dans les directions où il agit sur les autres corps. Au lieu que les

Théorèmes démontrés dans les articles 517 & 519. touchant l'égalité des sommes des produits des corps, par les quarrés de leurs vitesses, comparées avant & après leurs percussions, ne s'étendent qu'à ceux qui ont un ressort parfait. Ces derniers sont fondés sur l'égalité des vitesses relatives de C & de plusieurs corps A, B, &c. dans leurs directions respectives, avant & après le choc ; & les autres sur l'article 434. & sur le principe général de l'article 511. Il y a néanmoins une analogie entre ces Théorèmes, que l'on peut peut-être expliquer par les mouvemens que les actions des ressorts produisent dans les corps, mais nous n'entendrons pas ces Théorèmes aux mouvemens de toutes les espèces, en conséquence de cette analogie.

527. Car, si le corps C descend d'une hauteur IC, avant qu'il commence d'agir sur les autres corps ; ou s'il y a quelque percussion des corps pendant qu'ils descendent & qu'ils n'ayent point de ressort, ou seulement un ressort imparfait ; ou en général, s'il y a une communication subite de mouvement d'un corps à un autre, & que les vitesses relatives dans les directions respectives, soient moindres immédiatement après cette action qu'auparavant ; dans ces cas, la somme des produits des corps, par les quarrés de leurs vitesses, sera moindre qu'elle n'auroit été, si les corps étoient descendus librement des mêmes hauteurs respectives ; & si ces corps sont supposés monter avec leurs vitesses respectives dans un tems, & que leurs mouvemens ne soient retardés que par leur pesanteur, le centre commun de gravité ne montera pas au même niveau d'où il est descendu. Lors-

Fig. 235.

que les corps C & A sans ressort ou avec un ressort imparfait, suspendus par des lignes égales KC & LA des points K & L, (qui sont sur le même niveau & à une distance l'un de l'autre égale à la somme des demi-diamètres des corps) après avoir décrit les arcs IC & EA se frappent l'un & l'autre ; ou lorsqu'un corps C, après sa chute de I, est chargé d'un nouveau corps en C qu'il charrie avec lui dans sa montée, (comme dans l'expérience connue, faite par M. Graham) il est clair que l'ascension de leur centre commun de gravité, doit être moindre que sa chute. Pour en donner un autre exemple simple, supposons que le corps C descende dans la verticale CD, & qu'en même tems il traîne un corps A le long de l'horizontale KL sans frottement, par une ligne ou chaîne CMA (que nous supposons sans pesanteur) dirigée par la poulie M, en sorte que MA

Fig. 236.

soit

soit toujours horifontale. Que d'abord C tire le corps A auffi-tôt qu'il commence à descendre, & la force accélératrice étant toujours directement comme la force absolue, & réciproquement comme la matiere mise en mouvement, le mouvement de chaque corps sera accéléré par une force moindre que la force accélératrice de la pèsanteur en raison de C à C + A. Soit $CG = Aa$, le quarré de la vitesse de C, lorsqu'il arrive en G, ou de A lorsqu'il arrive en a , sera au quarré de la vitesse que C auroit acquise, en tombant librement de C en G en même raison de C à C + A, les quarrés des vitesses acquises, par la chute de la même hauteur, étant comme les forces qui les produisent, lorsque ces forces agissent uniformément, par l'article 434. & par conséquent le produit de la somme de C & A, par le quarré de leur vitesse commune, est égal au produit de C par le quarré de la vitesse qu'il auroit acquise, par la même chute perpendiculaire, s'il étoit tombé librement de C en G; & si les corps C & A sont supposés monter de G & a avec leurs mouvemens respectifs acquis en ces points, leur centre commun de gravité s'élèvera au même niveau d'où il étoit descendu en ce cas. Mais supposons que le corps C descende d'abord de M en C, & que la ligne ou chaîne AMC n'est pas tendue jusques à ce qu'il arrive en C, enforte qu'aucun mouvement n'est communiqué au corps A jusques à cet instant; le mouvement acquis par C sera alors divisé entre C & A, enforte qu'il produise des vitesses égales dans chacun; la somme des produits des corps, par les quarrés de leurs vitesses, sera moindre, en ce cas, que le produit de C par le quarré de la vitesse qu'il acquiert, en descendant librement de M en C, à proportion que C est moindre que C + A; & si les corps C & A sont supposés monter, avec ces vitesses, de leurs lieux respectifs, l'ascension de leur centre de gravité sera moindre que sa chute en même raison. Si nous supposons, dans les articles 521 & 522. que le corps C tombe de I en C avant qu'il agisse sur A & B, & qu'ensuite il descende, poussant ces corps par sa pèsanteur comme ci-devant, soit $Ce : CI :: Cd : CD$, la somme des produits des corps par les quarrés des vitesses respectives, acquises lorsque C arrive en G, sera égale au produit de C par le quarré de cette vitesse seule qu'il auroit acquise, en descendant librement de e en d . On fera voir, même, que dans le cas de l'article 524. si C tombe d'une hauteur avant que d'agir sur A & B, & qu'ensuite il descende en les

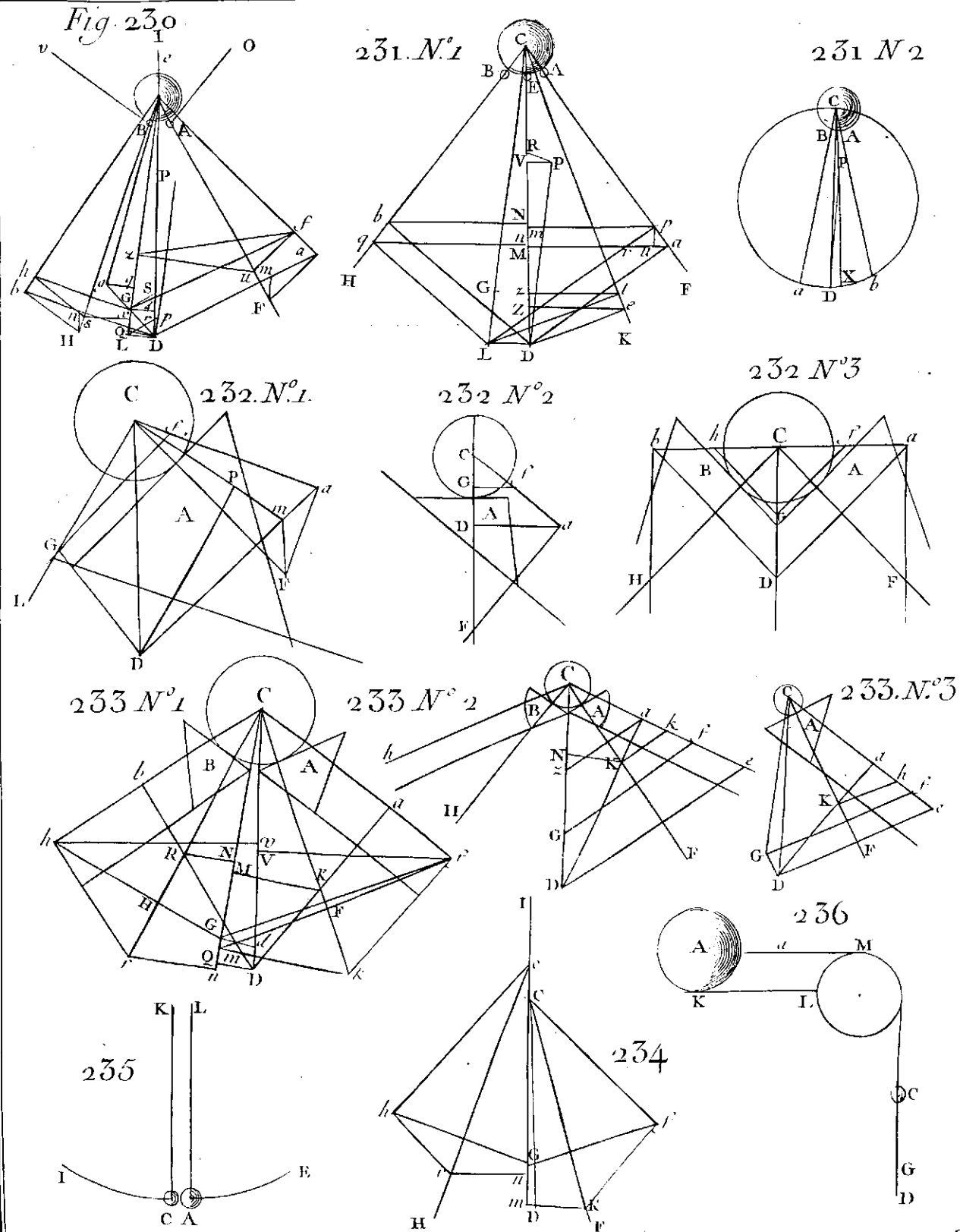
Fig. 230.

Fig. 233.

poussant comme dans cet article, & que ces corps soient supposés monter avec les vitesses respectives, acquises depuis leurs lieux respectifs en chaque tems, l'ascension du centre de gravité sera moindre que sa chute. Nous avons rapporté ces exemples, quoique communs, pour prévenir les erreurs occasionnées par les expressions de quelques Auteurs célèbres, qui paroissent donner ce principe de l'égalité d'ascension & de chute du centre de gravité, comme général.

Fig. 236.

528. Lorsqu'un corps C est supposé entraîner le corps A le long de KL, par la ligne ou chaîne CMA depuis le commencement de sa chute, la puissance uniforme de la pesanteur, agissant sur C, produit une plus grande quantité de mouvement dans C & A que celle que C seul auroit acquise par la même chute perpendiculaire CG, en même proportion que le tems de la chute par CG est prolongé, dans le premier cas; au-dessus de ce qu'il est dans le second; & l'on peut dire la même chose des cas décrits dans les articles 521 & 522. si l'on a égard aux directions des mouvemens des corps. Et comme on peut supposer raisonnablement que la même puissance, agissant sur le même corps avec la même direction, produit une plus grande force dans un tems plus grand, aussi-bien qu'une plus grande quantité de mouvement, il n'y a pas lieu de changer la manière ordinaire de mesurer les forces des corps en mouvement, au sujet des Théorèmes précédens, ou de ceux qui suivent, concernans les produits des corps par les quarrés de leurs vitesses. Si nous mesurons les forces des corps en mouvement, par le produit de leurs quantités de matière, & des quarrés de leurs vitesses, la somme des forces acquises par les corps C & A en G & a, seroit égale à la force que C seul acquerreroit par la même chute CG; & la même force qui, imprimée sur le corps C seul, le feroit monter dans la verticale de G en C, si elle étoit imprimée sur les corps C & A tout-à-la-fois, en sorte qu'elle produisît des vitesses égales dans le corps A de A vers a, le long de l'horizontale LK, & dans le corps C depuis G en haut, elle feroit monter le corps C à la même hauteur de G en C, comme dans l'autre cas, & en même-tems elle feroit décrire au corps A la ligne aA égale à GC le long de l'horizontale LK; la force qui suffiroit pour produire ces deux effets seroit toujours la même, quel que grand que l'on pût supposer le corps A: & si nous voulons, de même, admettre que la force qui fait mon-



ter un corps donné C de G en C, & qui lui fait parcourir la hauteur donnée GC, est toujours la même sans égard au tems, il suit de-là, que le mouvement du corps A de A en a, est un effet qui ne doit être d'aucune considération. On doit faire la même remarque en d'autres exemples; mais il n'est pas nécessaire d'embarasser la théorie du mouvement, par les conséquences qui suivent de cette mesure des forces des corps; & ainsi nous allons tirer nos conclusions du principe de l'article 511. qui est universellement reçu.

529. Jusques ici nous avons supposé que le corps C agissoit immédiatement par son attouchement sur les autres corps. Soient maintenant les corps A & B fixés à l'essieu KIL aux distances respectives KA & LB, & que le corps C tombe sur le levier inflexible IC, (fixé perpendiculairement au même essieu) avec une direction & une vitesse représentée par CD; & supposant la figure en repos avant le choc, qu'elle ne soit mobile qu'autour de l'essieu KL. Que CQ, perpendiculaire à IC, rencontre DQ parallèle à IC en Q; divisez CQ en N, en sorte que CN soit à NQ, comme le produit du corps C, par le carré de sa distance à l'axe du mouvement, est à la somme des produits des autres corps, par les carrés de leurs distances respectives au même axe; DG, parallèle à CQ, coupera NG parallèle à IC en G, de sorte que CG représentera la vitesse de C après le choc; & si Af & Bh sont à CN, comme KA & LB à IC respectivement, Af & Bh représenteront les vitesses respectives de A & B après le choc, lorsqu'il n'y a point de ressort. Car, si nous supposons qu'une ligne CN représente la vitesse de C, après le choc, dans la direction CQ, alors (parce que la figure se mouvant autour de l'axe KL, la vitesse d'un point A est à celle d'un point C, comme KA à IC, ou comme Af à CN) Af représentera la vitesse, & A.Af le mouvement de A. Le mouvement, que C doit perdre dans la direction CQ en produisant dans A, ce mouvement A.Af doit-être à A.Af, comme KA est à IC, (par les principes de la mécanique) ou à A.CN :: KA² : IC², & le mouvement que C perd dans la même direction, en produisant dans B un mouvement B.Bh, est de même B.Bh :: LB : IC, ou à B.CN :: LB² : IC².; & tout le mouvement perdu par C dans la direction CQ, étant C.NQ, il suit que C.NQ.IC² = A.CN.KA² + B.CN.LB², & que CN : NQ :: C.IC² : A.KA² + B.LB².

Donc, puisque CQ est divisé en cette raison au point N, & que le mouvement QD n'est pas affecté par le choc, CG sera la direction & la vitesse de C après le choc. Lorsque C est d'un ressort parfait, prolongez DG jusques à ce que $Dg = 2 DG$, alors Cg marquera la direction & la vitesse de C après le choc. Celles de A & B seront représentées respectivement par $2 Af$ & $2 Bh$.

530. Lorsque le corps C & le levier sont supposés sans ressort, la somme des produits des corps par les quarrés de leurs vitesses après le choc, est moindre que le produit de C par le quarré de sa vitesse incidente, en raison de Cd à CD, Gd étant perpendiculaire à CD; mais lorsque C est d'un ressort parfait, ces produits sont égaux entre-eux. Car, par la démonstration du dernier article $C.CN.NQ = A.Af^2 + B.Bh^2$. Et ajoutant $C.CG^2$, la somme totale devient égale au produit de C par $CD^2 - CQ^2 + QCN$, ou $CD^2 - CQN$, ou (à cause que DG ou QN est à Dd, comme CD est à CQ) $CD^2 - CD.Dd$, c'est-à-dire, à $C.CD.Cd$; qui est moins que $C.CD^2$ en raison de Cd à CD. Mais $C.Cg^2 + 4A.Af^2 + 4B.Bh^2$ est à $C.CD^2$; car, soit gn perpendiculaire à CN en n; cette somme, étant égale à $C.Cg^2 + C \times 4QNC$ (par la démonstration du dernier article) ou au produit de C par $Cn^2 + gn^2 + 4QNC$ elle est égale (*Elem.* 8. 2. QN & Nn étant égaux) à $C.CD^2$. Donc, si l'on suppose que C acquiere sa vitesse incidente CD, en tombant d'une hauteur c C, & que les corps soient supposés monter avec leurs vitesses respectives, immédiatement après la percussion, enforte que leurs mouvemens ne soient retardés que par la pesanteur, leur centre de gravité montera à la même hauteur d'où il étoit descendu, dans le second cas où C est supposé d'un ressort parfait; mais dans le premier cas, l'ascension du centre de gravité sera moindre que sa chute, en même raison que Cd est moindre que CD. Ces Théorèmes s'étendent aisément aux cas où plusieurs corps frappent le levier IC tout-à-la-fois, ou différens leviers fixés au même effieu avec des directions & vitesses données; & lorsque le ressort est imparfait, l'ascension du centre de gravité sera toujours moindre que sa chute, supposant que les mouvemens des corps se tournent en haut après la percussion.

531. Supposons maintenant que le corps C agit par sa seule pesanteur sur le levier IC, & que par le moyen de ce levier il pousse toute la figure autour de l'axe KL, les corps A & B

étant supposés sans pesanteur, la force accélératrice, & la direction de la pesanteur, étant représentée par CD , la force & la direction, avec laquelle C doit commencer à descendre, sera représentée par CG , si le corps C est supposé glisser le long du levier IC & par CN , si C est fixe au levier, la force NG étant détruite, en ce cas, par la résistance de l'essieu. De ce que $C.CG^2 + A.Af^2 + B.Bh^2 = C.CD.Cd$, il suit que dans l'un & l'autre cas, la somme des produits des corps, par les quarrés de leurs vitesses respectives, est égale au produit de C par le quarré de la vitesse qu'il auroit acquise, par la même chute perpendiculaire, s'il étoit tombé librement dans la verticale CD , pourvu que le corps C agisse sur le levier, depuis le commencement de sa chute. Il suit, de même, de l'article 529. que si I

Fig. 237.
 N. 2.

est le centre de gravité des corps $A, B, \&c.$ & qu'un poids P agisse sur le levier IA à la distance IC de l'axe du mouvement que l'on suppose passer par I , la force CG , par laquelle P descend, sera à sa pesanteur CD , comme $P.IC^2$ est à la somme des produits des corps $A, B, \&c.$ par les quarrés de leurs distances respectives à l'axe ajoutés à $P.IC^2$; & par là on peut déterminer le mouvement de P lorsqu'il fait tourner la figure autour du centre de gravité I , par le moyen d'une corde $PCZR$ passée autour de l'essieu CZR .

532. Si l'on suppose que tous les corps, C, A & B fixés à

Fig. 238.

l'essieu à leurs distances respectives CI, AK & BL , gravitent par des lignes paralleles CD, Aa & Bb ; que ces lignes soient égales entre-elles, & représentent la force accélératrice de la pesanteur; que Cg, Af & Bh représentent les forces, par lesquelles leurs mouvemens sont accélérés avec leurs directions respectives perpendiculaires à IC, KA & LB , pendant que la figure se meut sur son axe KL . Soient DQ, am & bk perpendiculaires à ces directions en Q, m & k , & gd, fn, hr perpendiculaires à CD, Aa & Bb en d, n & r . Si CQ est plus grand que Cg , mais Aa moindre que An , & Bb moindre que Br , le corps C perd, par son action sur le levier IC , une force $C \times gQ$, & par là les corps A & B acquièrent les forces $A.mf$ & $B.kh$ respectivement. Ainsi ayant égard aux longueurs des différens leviers CI, KA & BL selon les principes connus de la mécanique, $C.gQ.IC$ sera $= A.mf.KA + B.kh.LB$, ou (à cause que les vitesses Cg, Af & Bh sont comme les distances de l'axe IC, AK & BL .) $C.Cg.gQ = A.Af.mf$

$+ B. B. h. k h$, c'est-à-dire, $C. C Q. C g - C. C g^2 = A. A f^2 - A. A f. A m + B. B h^2 - B. B h. B k$. Mais $C Q. C g = C D. C d$; $A f. A m = A a. A n$, & $B h. B k = B b. B r$. Donc $C. C g^2 + A. A f^2 + B. B h^2 = C. C D. C d + A. C D. A n + B. C D. B r$; d'où il suit, (par l'article 434.) que tous les corps descendant, pendant que l'essieu se meut, la somme des produits des corps, par les quarrés des vitesses respectives acquises dans un tems, est la même que s'ils étoient tombés librement le long des hauteurs perpendiculaires d'où ils sont descendus. Mais si un corps comme B (par exemple) a été de l'autre côté de l'essieu KL, enforte qu'il soit monté, pendant que le centre commun de gravité des corps descendoit, $h k$ auroit été égal à $B k + B h$. En ce cas, le terme $B. C D. B r$ devroit être négatif dans la seconde partie de la dernière équation; & en général, la somme des produits des corps, par les quarrés de leurs vitesses respectives, est égale à la différence de la somme des produits de ceux qui descendent par les quarrés des vitesses qu'ils auroient acquises par les mêmes chûtes, s'ils étoient tombés librement, & de la somme des produits de ceux qui montent par les quarrés des vitesses respectives qu'ils auroient acquises, en tombant librement le long des hauteurs respectives où ils se sont élevés. Dans l'un & l'autre cas, il suit que si les corps sont supposés monter de leurs lieux respectifs dans un tems, & retardés par leur seule pesanteur, leur centre commun de gravité montera toujours au même niveau d'où il est descendu. On démontre ce principe, de la même manière, lorsque les corps C, A, B, &c. sont supposés agir l'un sur l'autre par des leviers composés, ou autres machines, sans frottement ou résistance du milieu. Mais il n'a pas lieu lorsqu'on suppose qu'un corps tombe sur un levier ou engin, avec une vitesse assignable, & qu'ensuite il descend avec lui.

533. Il y a long-tems que M. Huggens* a avancé comme un principe général, « que si des corps commencent à se mouvoir « par leur pesanteur, leur centre commun de gravité ne peut ja- « mais s'élever plus haut que le point où il étoit au commence- « ment du mouvement. » A quoi il a ajouté comme une seconde hypothèse, « que faisant abstraction de la résistance de l'air, & « d'autres pareils obstacles, un pendule composé, doit décrire « des arcs égaux en montant & en descendant. » Et par ces deux principes, il est parvenu à déterminer la longueur d'un pendule

* Horlog. Oscill. Patt. IV. Hip. 1 & 2.

simple qui fait ses vibrations dans le vuide, en même tems qu'un pendule composé, sur des arcs semblables, & à déterminer le centre d'oscillation des corps. Il n'assure pas néanmoins que le centre de gravité des corps doit toujours s'élever à la même hauteur d'où il est descendu, mais qu'il ne doit jamais s'élever plus haut; ce qui est en effet un principe général; car l'ascension du centre de gravité se trouve toujours, ou égale à sa chute, ou moindre qu'elle, mais jamais plus grande. Il semble néanmoins qu'il va plus loin, & qu'il assure que les corps retiennent toujours leur *force ascendante* *, comme il l'appelle, par laquelle leur centre de gravité s'élève au même niveau d'où il est descendu. Ce principe a lieu, en effet, dans tous les cas qu'il a proposé, (où il appelle corps durs ceux qui sont à ressort parfait) & dans plusieurs autres cas, comme on l'a fait voir dans les articles précédens, où nous avons tâché de distinguer les cas où ce principe a lieu, de ceux où l'on ne peut pas l'admettre, & de faire voir, en même-tems, qu'aucune conclusion utile en mécanique, n'a été affectée par les disputes, concernant la mesure de la force des corps en mouvement, ce qui avoit été reproché aux Mathématiciens par l'*Analyse Quesf.* 9.

534. Supposons donc que OV soit égal à la longueur d'un pendule simple, qui fait ses vibrations dans le vuide sur des arcs semblables, en même-tems que le pendule composé décrit dans l'article 532. ou soit OV la distance d'un point de ce dernier pendule qui se meut avec lui, de la même vitesse que si OV étoit un pendule simple suspendu en O. Que S représente la somme des corps C, A & B, & OG la distance de leur centre de gravité à l'axe. Pendant que le pendule se meut, que les points C, B, A, G & V descendent en *c, b, a, g & v* respectivement; que GM soit la chute perpendiculaire du centre de gravité, & VR celle du point V. Puisque les vitesses des points C, B, A, G & V sont comme leurs distances à l'axe d'oscillation, & que la vitesse acquise en *v* est telle qu'elle feroit monter le corps de R en V, (par la supposition) & que les hauteurs où les corps monteroient par les vitesses acquises en *c, b, a & v* sont en raison doublée de ces vitesses, il suit que C, B & A

Fig. 238.
N. 2.

* *Hæc constans lex est corpora servare vim suam ascendentem, & idcirco summam quadratorum velocitatum illorum semper manere eandem. Hoc autem non solum obtinet in ponderibus pendulorum, & percuss-*

sione corporum durorum, sed in multis quodque aliis mechanicis experimentis. Observ. D. Huggen. in literas D. March, de l'Hôpital, &c. Oper. Vol. I. p. 258.

monteroient par leurs vitesses respectives en ces points aux hauteurs $VR. \frac{IC^2}{OV^2}$, $VR. \frac{LB^2}{OV^2}$ & $VR. \frac{KV^2}{OV^2}$. Et puisque leur centre commun de gravité monteroit à la même hauteur d'où il est descendu, par l'article 532. il suit, (article 509.) que $C. VR. \frac{IC^2}{OV^2} + B. VR. \frac{LB^2}{OV^2} + A. VR. \frac{KA^2}{OV^2} = S. GM$. Mais les arcs parcourus par G & V étant semblables, $GM : VR :: OG : OV$. Donc $S. OG. OV = C. IC^2 + B. LB^2 + A. KA^2$, & l'on trouve OV en multipliant chaque corps par le quarré de sa distance à l'axe d'oscillation; & divisant la somme des produits par $S. OG$ qui est le produit de la somme des corps par la distance de leur centre commun de gravité au même axe. Cette même démonstration pouvant s'appliquer à tout nombre de corps, nous pouvons conclure que lorsqu'un corps se meut autour d'un effieu donné, la distance de son centre d'oscillation à cet axe, (où la longueur d'un pendule simple qui fait ses vibrations dans le vuide, en même-tems que le corps dans des arcs semblables) se trouve en calculant la fluente qui vient de chaque particule ou élément du corps, multipliée par le quarré de sa distance à l'axe, & divisant cette fluente par les corps, multipliée par la distance de son centre de gravité au même axe.

N. 32

535. Si les points C , A & B sont dans un plan perpendiculaire à l'axe d'oscillation en O , soient Ci , Bl & Ak perpendiculaires à OG en i , l & k ; OC^2 étant $= OG^2 + CG^2 - 2 OG i$, $OB^2 = OG^2 + BG^2 + 2 OG l$, & $OA^2 = OG^2 + GA^2 + 2 OG k$, (*Elem.* 12. & 13. 2.) le point i étant entre O & G , & les points l & k de l'autre côté de G , & $C. iG$ étant $= B. lG + A. kG$, (article 509.) il suit que la somme des produits des corps, par les quarrés de leurs distances à O , ou $S. OG. OV = S. OG^2 + C. CG^2 + B. BG^2 + A. AG^2$. par conséquent $S. OG. GV =$ à la somme des produits de chaque corps, par le quarré de sa distance au centre de gravité; & l'on trouve GV en divisant cette somme par $S. OG$; par où le calcul de la distance du centre d'oscillation à l'axe dans les solides est en quelques cas abrégé.

Fig. 230.

536. Pour en donner un exemple, soit DEd la section d'une Sphere par son centre G , & par un plan perpendiculaire à l'axe d'oscillation; Dd le diamètre de ce cercle perpendiculaire à l'axe; GE un rayon perpendiculaire à Dd , & PFp un cer-
cle

cle concentrique, soit MP une ordonnée perpendiculaire à GE en N , & que la raison de n à 1 exprime celle de la circonférence au rayon. Imaginons une surface cylindrique, qui a pour base la circonférence PFp , perpendiculaire au plan DEd & terminée par la surface de la Sphere. Sa hauteur étant $2PM$, elle sera exprimée par $2n.GP.GN$, qui étant multipliée par le quarré de GP (qui est la distance des particules dans chaque section de cette surface perpendiculaire à l'axe d'oscillation depuis le centre de gravité de la section) & le produit, $2n.GN.GP^3$ étant multipliés par la Fluxion de GP , ou (parce que $GP^2 = GD^2 - GN^2$, & que la Fluxion de GP est à celle de GN , comme GN à GP) le produit de $2n.GN^2$ par $GE^2 - GN^2$ étant multiplié par la Fluxion de PM , la fluente, par la converse de l'article 146. fera le produit de $2n.GN^3$ par $\frac{1}{3}GE^2 - \frac{1}{5}GE^2$. Mais cette fluente devient $-\frac{2}{5}n.GE^5$, lorsque P a parcouru tout le rayon DG , & que GN devient égal à GE ; & cette fluente étant divisée par $\frac{2}{5}n.GE^3.OG$, (qui exprime la solidité de la Sphere multipliée par OG , comme on l'a fait voir dans l'Introduction.) On trouvera que GV , distance du centre d'oscillation au centre de gravité de la Sphere, est $\frac{2}{5} \cdot \frac{GE^2}{OG}$, ou les deux cinquièmes de la troisième proportionnelle

à GO & GE . Ce sujet ayant été traité au long dans *Horol. oscill. Par. 4. dans les actes de Leipsik, 1714. & Meth. increm. Pr. 24.* & dans plusieurs autres ouvrages, nous ne nous y arrêterons pas plus long-tems, & nous ajouterons seulement que lorsqu'un poids P fait tourner une figure autour de son centre de gravité I , par le moyen d'une corde $PCZR$ qui entortille l'effieu CZR , comme dans l'article 531, V étant le centre d'oscillation de la figure lorsque C en est le centre de suspension; soit S qui marque la masse, ou la pesanteur de la figure qui doit être muë, que l'on prenne Ie sur IC en même raison à IC que P à S ; alors CG , force par laquelle le mouvement de P doit-être actuellement accéléré, sera à CD , force accélératrice de la pesanteur, comme eI à eV . Car (par l'article 531.) CG est à GD , en ce cas, comme $P.IC^2$ est à $A.AI^2 + A.BI^2 +$, &c. laquelle dernière somme est égale à $S.AC.IV$, par l'article 535. Donc $CG:GD :: P.IC:S.IV$, ou $:: eI:IV$ & $CG:CD :: eI:eV$, ce qui s'accorde avec la solution donnée, par le Sçavant Daniel Bernoulli, dans les Mémoires de Petersbourg.

Fig. 237.
N. 2.

Fig. 340.
N. 1.

537. Newton a considéré le mouvement de l'eau qui sort d'un vase cylindrique $ABDC$ par une ouverture EF dans le fonds CD , (*Princip. Lib. II. Prop. XXXVI.*) Les réflexions suivantes donneront quelque éclaircissement à sa théorie sur cette matière. Pendant que l'eau sort de l'ouverture EF , celle qui reste dans le vase s'abaisse dans le même tems; & quoique les particules de cette eau descendent avec des vitesses inégales, on peut considérer la vitesse de la chute de la surface AB comme leur vitesse moyenne. Cette vitesse commence évidemment par zéro, (comme celle de tout corps pesant qui descend par sa pesanteur) & pendant qu'elle s'accélère, elle est toujours à la vitesse avec laquelle l'eau sort de EF , comme EF est à AB . L'effet continuel de la pesanteur sur toute la masse de l'eau, doit être considéré comme triple. Il accélère, pendant quelque tems, au moins le mouvement par lequel l'eau descend dans le vase; il produit l'excès du mouvement de l'ouverture sur le mouvement qu'elle auroit en commun avec le reste de l'eau, & il agit sur le fonds du vase dans le même tems. Que la vitesse avec laquelle l'eau sort de EF , dans un terme du tems, soit représentée par X , la vitesse, avec laquelle la surface AB s'abaisse, par V , la force accélératrice de la pesanteur par g , la force qui pourroit produire l'accélération de V par f , & le tems, depuis le commencement du mouvement, par T . La gravitation de toute la masse de l'eau dans le vase cylindrique $ABDC$ pourra s'exprimer par $g \cdot AB \cdot AC$; & parce que la force f est employée à produire l'accélération du mouvement par lequel l'eau s'abaisse dans le vase, la force $AB \cdot AC \times (g - f)$ fera ce que nous devons supposer être employé à agir sur le fonds, & à produire la vitesse $X - V$ dans l'eau qui sort par l'orifice. Supposons que la raison de $r - 1$ à 1 exprime la proportion des parties de cette dernière force qui produit ces deux effets, ou que r est à 1 , comme la force $AB \cdot AC \cdot (g - f)$ est à la partie que nous concevons produire la vitesse $X - V$ dans l'eau qui sort par EF ; cette partie sera exprimée par $AB \cdot AC \cdot \frac{g - f}{r}$. La quantité de l'eau, qui sortiroit de l'ouverture EF dans un tems T avec la vitesse X continué uniformément, s'exprimera par $EF \cdot T \cdot X$, & la force qui produiroit la vitesse $X - V$, dans cette quantité d'eau, est comme la quantité du mouvement qui seroit produit en cette manière (ou $EF \cdot T \cdot X \cdot X - V$) directement, & com-

me le tems T réciproquement, c'est-à-dire, comme $EF.X.X-V$,
 ou (parce que $X : V :: AB : EF$, & $X-V : X :: AB-EF : AB$) comme $EF. \frac{AB-EF}{AB}. XX$, que nous supposons
 $= A B. A C. \frac{g-f}{r}$, qui représente la même force. Le quar-
 ré de la vitesse, qui seroit acquise par la chute AC , s'exprime
 par $2 AC.g$, (art. 434.) & si $K C : A C :: AB. AB : 2 r. EF$,
 $(AB-EF)$ & que A marque la vitesse qui seroit acquise par
 la chute $K C$, AA sera à $2 AC.g :: K C : A C$, ou $:: AB.^2 : 2 r. EF. (AB-EF)$ & par conséquent $:: XX : 2 AC. (g-f)$
 Donc $AA : XX :: g : g-f$, & $g : f :: AA : AA-XX$.
 De-là, il suit que si l'on suppose que la Fluxion de X (ou de
 V qui est en raison donnée à X) s'évanouit, afin de trouver sa
 plus grande valeur, ou la limite de toutes ses valeurs, par l'art.
 242. la force f qui accélère V s'évanouira; $g-f$ sera $= g$,
 & $X=A$. En général, la chute, par laquelle une vitesse X de
 l'eau qui sort, seroit acquise, est à $K C$, chute par laquelle A
 seroit acquise, comme $g-f$ est à g . On voit aussi que la Flu-
 xion de V est à celle de la vitesse d'un corps qui descend libre-
 ment dans le même tems par la verticale, comme f est à g , ou
 comme $AA-XX$ à AA . Si les Fluxions de T , X & V
 sont représentées par t , x & v respectivement, f sera représen-
 tée par $\frac{v}{t}$, & AA sera à $AA-XX :: gt : ft$, ou $:: gt : v$,
 ou $:: AB.gt : EF.x$, parce que $v : x :: EF : AB$, par
 l'article 24. en sorte que t s'exprime par une quantité qui est à
 x , en raison composée de AA à $AA-XX$, & de EF à
 AB . Par AB & EF , nous entendons les aires des sections du
 cylindre & de son orifice, & non pas leurs diamètres. Nous
 supposons la raison de r à 1 invariable, & parce qu'on a fait
 différentes suppositions touchant cette raison, nous ferons voir
 comment on peut calculer le mouvement de l'eau, dans cha-
 cune de ses hypothèses, avant que d'examiner qu'elle est la vé-
 ritable.

538. Soit anl une hyperbole équilatere, c son centre, a le
 sommet, que ab , perpendiculaire à ca , rencontre l'asymptote
 en b ; que ab représente la vitesse A ; ad la vitesse X , joignez
 cd & prolongez-là jusqu'à la rencontre de l'hyperbole en n ; le
 tems T , pendant lequel la vitesse de l'eau qui sort devient éga-
 le à X , fera au tems où un corps tombe de K en C , par sa
Fig. 240.
N. 1. & 2.

pésanteur en raison composée de l'aire de l'orifice EF à l'aire de la base CD ou AB, & du secteur hyperbolique can au triangle cab , si l'on suppose que le vase soit entretenu toujours plein. Car, soit nm perpendiculaire à l'axe ca en m , $ad^2 : nm^2 :: ca^2 : cm^2$, ou $ca^2 + nm^2$, (par la propriété de l'hyperbole) & $cm^2 : ca^2 :: ab^2 : ab^2 - ad^2$, ou :: AA : AA — XX. La Fluxion du secteur can est à celle du triangle cad , (ou $\frac{1}{2}Ax$) comme cn^2 est à cd^2 , (article 120.) ou :: $cm^2 : ca^2$, & par conséquent :: AA : AA — XX, ou :: AB. gt : EF. x . Donc la Fluxion du secteur can est à A. gt :: AB : 2 EF, & le secteur can est à A gT en même raison, par l'article 24. Que Z exprime le tems où un corps tombe de K en C, & acquiert, par sa chute, la vitesse A, Z sera exprimée par $\frac{A}{g}$, & T sera à Z, comme 2 EF. can est à AB. ca^2 .

Donc, si Z, T, $ab. \frac{AB}{EF}$ & L sont proportionnelles, & que la raison, dont L est le logarithme, (le module étant ab) soit celle de c à d , la vitesse ab sera à la vitesse acquise à la fin du tems T, comme $c + d$ est à $c - d$. Par exemple, si l'aire AB est à l'aire EF, comme 10 est à 1, & que T soit supposé égal à Z, L sera à ab , comme 20 à 1, c fera à d en plus grande raison que 485000000 à 1, & l'excès de ab sur ad sera moindre que la 242000000^e partie de ab , dans le tems qu'un corps tomberoit de K en C, quoique, selon cette théorie, ad ne puisse jamais devenir précisément égal à ab .

539. Que mk , perpendiculaire à l'asymptote, rencontre l'hyperbole en p , joignez cp ; la quantité de l'eau qui sort de EF, dans le tems T, sera à la quantité qui seroit sortie de EF dans le même tems, si la vitesse avoit été toujours égale à A comme le secteur cap est au secteur can . Car, que la quantité d'eau, qui sort par EF, dans le tems T, soit représentée par Q, & sa Fluxion par q , alors q sera exprimée par X r . EF, qui, par l'article 537. est à EF. $\frac{Xx}{g}$, comme AA.EF est à (AA—XX) AB, en sorte que la fluente de X t est à la moitié du logarithme de la raison de AA—XX à AA, comme EF est à g . AB, le module étant AA. Soit ae perpendiculaire à l'asymptote en e , si le module est ce^2 , ou $\frac{1}{2}AA$, l'aire $ae kp$ sera le logarithme de la raison de pk à ae , ou de ce à ck , ou de ca à cm , c'est-à-dire, $ae kp = \frac{1}{2}$ logarithme de la raison de ca^2 à cm^2 ,

ou de $AA - XX$ à AA . Donc la fluente de Xt est à l'aire $ackp$, ou au secteur cap , comme $2EF$ est à $g.AB$. Mais $A.T.EF$ exprime la quantité d'eau, qui seroit sortie par l'ouverture EF , dans le même tems T avec la vitesse A , & $A.T$ est au secteur can en même raison, par le dernier article. Donc Q est à $A.T.EF$, comme le secteur cap à can . Donc la différence de $A.T.EF$ & de Q est à $A.T.EF$, comme le secteur cpn est à can , & à la quantité qui seroit sortie de l'ouverture EF dans le tems Z , (pendant lequel un corps tomberoit de K en C) comme $EF.ncp$ est à $AB.cab$. Soit prise ch sur l'asymptote égale à $2ce$, & que hs , perpendiculaire à ch , rencontre l'hyperbole en f ; que mn prolongée rencontre l'asymptote en u , & que nl soit perpendiculaire à l'asymptote en l ; cl étant toujours moindre que cu ou $2ck$, il suit que ncp est toujours moindre que le secteur cas , ou que le logarithme hyperbolique de 2 , & que la différence de la quantité d'eau qui sort par EF , & de celle qui seroit sortie en même tems avec la vitesse A , est à ce qui seroit sorti avec la vitesse A dans le tems Z , en une raison qui est toujours moindre que celle de $EF.cas$ à $AB.cab$; mais qu'elle approche continuellement de cette raison comme de sa limite.

540. Dans les deux précédens articles nous avons supposé Fig. 241. que le vase étoit entretenu toujours plein à la hauteur AC , & que l'eau étoit fournie à la surface AB avec la vitesse V , par laquelle elle s'abaisse dans le vase. Si nous supposons maintenant qu'on ne fournit point de nouvelle eau, mais que la surface supérieure AB s'abaisse, pendant que l'eau sort par l'ouverture EF ; soit aC la hauteur de l'eau au commencement du mouvement, AC sa hauteur après un tems quelconque, & que la raison de e à 1 soit celle qui est composée de la raison de $2r$ à 1 , & de $AB - EF$ à EF . Soit une suite de quantités en proportion continue, dont Ca & CA sont les premiers termes, & que CH soit le terme dont la place, dans la progression, soit marquée par $e + 1$, lorsque e est un nombre rationnel, ou plus généralement, soit le logarithme de CH au logarithme de CA , comme e à 1 , le module étant Ca ; la vitesse de l'eau sortant par EF , sera telle qu'elle auroit été acquise par une chute qui est à AH , en raison constante de AB^2 à EF^2 . ($e - 1$) Car, soit AC représentée par H , & sa Fluxion par $-h$. (qui est négative, parce que AC décroît,) Que D repré-

sente la chute qui produiroit la vitesse X , & d sa Fluxion. Puisque $-h$ est représentée par Vt , gd par Xx ; (article 434.) que v est à x , comme EF est à AB , & g est à f , comme AA est à $AA - XX$, il suit que $-h$ est à d , comme $EF^2.AA$ est à $AB^2.(AA - XX)$ ou comme $EF^2.H$ à $AB^2.H - EF^2.e.D$, en sorte que $Hh.\frac{AB^2}{EF^2} = eDh - Hd$, & ainsi en multipliant

par H^{-e-1} , & trouvant les fluentes (par la converse des articles 99 & 168.) $EF^2.(e-1)D = AB^2.(CA - CH)$ ou $AB^2.(CH - CA)$ selon que e est plus grand ou moindre que l'unité: mais lorsque $e = 1$, on trouve que D est à CA en raison composée de AB^2 à EF^2 , & du logarithme de CA au module Ca . Lorsque e surpasse l'unité, la vitesse de l'eau est la plus grande, lorsque CA est à Ca , comme l'unité est au nombre, dont le logarithme est au logarithme de e , comme 1 à $e - 1$, & la vitesse est celle qui auroit été acquise par une chute qui est à AC , comme AB^2 à $e.EF^2$.

Fig. 24c.
N. 6.

541. Que IG , perpendiculaire à l'aire EF en G , rencontre AB en H , & qu'elle soit à IH en raison doublée de l'aire AB à l'aire EF . Soit $AMEFNB$ une cataracte d'eau telle qu'une de ses sections horizontales, comme MN soit toujours en raison sous-doublée inverse de sa distance IR de I . Supposant (avec Newton) que l'eau autour de cette cataracte est congelée, & qu'il y en entre toujours de nouvelle dans la surface AB , avec une vitesse acquise par la chute IH , l'eau descendra sous la forme de cette cataracte, & ses sections diminueront en même proportion que la vitesse du fluide qui descend, augmente, & elle ne produira aucune pression sur la partie congelée environnante. Ainsi l'eau, dans le vase, se divise en deux parties; la gravitation de la cataracte produit l'augmentation du mouvement de l'eau qui descend par chaque section, ou l'excès de celui par lequel elle sort à l'ouverture sur celui qu'elle a en entrant dans la surface AB ; pendant que la gravitation des parties environnantes agit sur le fonds du vase. La raison de ces deux parties est celle de $2EF$ à $AB - EF$. Car, puisque la section MN est en raison sous-doublée inverse de IR , le solide $AMEFNB$ est égal à $2EF.IG - 2AB.IH$, (comme on peut aisément le conclure de l'article 307.) lequel est à $2EF.IG$, comme $AB - EF$ est à AB , parce que $IH : IG :: EF^2 : AB^2$. Le solide cylindrique est à $AB.HG$,

ou $IG \cdot \frac{AB^2 - EF^2}{AB}$, & par conséquent le solide de la cataracte est à celui du cylindre comme $2EF$ est à $AB + EF$. Supposant donc, avec Newton, que les forces qui produisent la vitesse $X - V$ dans l'eau qui sort par EF , & dans celle qui agit sur le fonds du vase sont les mêmes, lorsque toute l'eau est fluide, la raison de r à 1 sera celle de $AB + EF$ à $2EF$. Et si l'on substitue cette raison à celle de r à 1 , dans les articles précédens, A , limite des vitesses avec lesquelles l'eau sort par EF , (lorsque le vase est conservé toujours plein à la hauteur CA) sera telle qu'elle est acquise par la chute KC , si $KC : \frac{1}{2}AC :: AB^2 \times 2EF : EF \cdot (AB^2 - EF^2)$ ou à $AC :: AB^2 : AB^2 - EF^2$; c'est-à-dire, si $KC = IG$. le tems pendant lequel la vitesse X (ou ad) est acquise, & la quantité d'eau qui sort, dans ce tems-là, sera telle qu'elle a été déterminée dans les articles 538 & 539. faisant abstraction du frottement de la résistance de l'aire, & de l'effet du mouvement oblique des particules, décrit par Newton, ce qui diminue cette quantité. Si l'on substitue cette valeur à la place de la raison de r à 1 , dans l'article 540. où l'on ne supposoit pas que l'eau fût supplée, on trouvera $e : 1 :: AB^2 - EF^2 : EF^2$, ou $e + 1 : 1 :: AB^2 : EF^2$, & si le logarithme de CH est au logarithme de $CA :: AB^2 - EF^2 : EF^2$, le module étant Ca , la vitesse de l'eau sortant par EF , sera telle qu'elle auroit été acquise par une chute qui est à AH en raison constante de AB^2 à $AB^2 - QEF^2$. Si nous avions supposé que l'action sur toutes les parties de l'aire CD fût la même, ou que la force qui produit la vitesse $X - V$ dans l'eau, qui sort par EF , est à l'action sur le fonds du vase, (ou 1 à $r - 1$) comme l'aire EF à l'aire $AB - EF$, ou $1 : r :: EF : AB$, alors KC auroit été à $\frac{1}{2}AC$, comme AB à $AB - EF$, & e à 1 , comme $2AB (AB - EF)$ à EF^2 . Fig. 241. N. 1.
 Nous avons supposé que les forces qui produisent le mouvement $X - V$ dans l'eau qui sort par EF , & qui agit sur le fonds, sont en même raison, lorsque l'eau, qui est hors de la cataracte $AMNEFB$, est congelée, & lorsqu'elle est fluide; mais il y a plusieurs différences entre les mouvemens de l'eau, dans ces deux cas. Dans le premier, la veine d'eau n'est pas plus contractée, dans sa sortie, que n'exige la figure de la cataracte; au lieu que dans le second, si l'eau sort par EF à travers une plaque mince, la veine se contracte immédiatement après qu'elle

est sortie, en conséquence des mouvemens obliques des particules qui tendent vers l'ouverture, & l'aire d'une section horizontale de cette veine à une petite distance de l'orifice, en raison de 1 à $\sqrt{2}$ à fort peu près lorsque AB est beaucoup plus grand que EF ; & la quantité d'eau qui sort par EF se trouve à fort peu près la même qui seroit sortie dans le même tems, si la raison de r à 1 avoit été celle de AB à EF , selon la seconde hypothese. Si nous supposons que, dans ce cas, la quantité d'eau qui sort par EF , répond à la seconde hypothese, mais que la vitesse répond à la premiere, lorsque nous substituons la section de la veine d'eau, après qu'elle est contractée par EF , alors l'aire de l'orifice EF sera à cette section de la veine d'eau, en raison sous-doublée de $AB^2 + (AB - EF)^2$ à AB^2 , qui est toujours moindre que la raison de $\sqrt{2}$ à 1, mais en approche beaucoup lorsque EF est fort petit comparé à AB , & est une raison d'égalité lorsque $AB = EF$. Mais lorsque l'eau ne sort pas par EF à travers une plaque fort mince, ou lorsque le vase n'est pas cylindrique, le mouvement de l'eau, & la figure de la veine est différent. Voyez, à ce sujet, *Princip. Lib. II. p. 329. Edit. 3.*

542. Lorsque l'eau est supposée fournie dans un cylindre, enforte qu'elle se tienne toujours à la même hauteur par-dessus l'orifice, il y a une analogie entre l'accélération du mouvement de l'eau, qui sort par cet orifice, & l'accélération d'un corps, qui descend par sa pesanteur dans un milieu qui résiste, en raison doublée de la vitesse du corps, & cette analogie mérite d'être rapportée ici. Que g représente la force de la pesanteur; R la résistance du milieu lorsque la vitesse est X , & que R soit à g , comme XX à AA ; $g - R$, force par laquelle le mouvement du corps est accéléré dans sa chute, sera à g , comme $AA - XX$ est à AA , & A fera la plus grande vitesse que le corps puisse acquérir en descendant, ou (pour parler plus exactement) la limite de toutes ses vitesses possibles; parce que si X est supposé égal à A , R sera $= g$, & il n'y aura plus d'accélération. Les Fluxions de la vitesse X , & du tems T , étant représentée par x & t , $g - R$ sera exprimé par $\frac{x}{t}$ & t sera à $\frac{x}{g}$, comme AA à $AA - XX$. Donc, si la résistance est égale à la force de la pesanteur, lorsque la vitesse est égale à celle qui seroit acquise par la chute IG (ou lorsque la limite des vitesses

tesses est égale à celle qui seroit acquise par la chute IG , (ou lorsque la limite des vitesses, que le corps peut acquérir en descendant, est égale à la limite des vitesses de l'eau qui sort par EF) alors τ , tems où le corps acquiert, en descendant, une vitesse X , fera à T , tems où l'eau, sortant par EF , acquiert la même vitesse, en raison constante de AB à EF ; parce que nous trouvons, dans l'article 537. que t étoit à $\frac{x}{g}$ en raison composée de AA à $AA - XX$, & de EF à AB ; en sorte que t est à t , comme AB à EF , & τ à T , en même raison.

543. Il paroît, de même, que si l'espace parcouru par le corps, pendant sa chute dans un tel milieu dans un tems τ , la quantité d'eau qui sort de l'ouverture EF dans un tems τ . $\frac{EF}{AB}$ fera égale à une colonne cylindrique de base EF , & de hauteur $= S. \frac{EF}{AB}$. Car, puisque les tems où le corps & l'eau acquièrent des vitesses égales, sont toujours en raison constante de AB à EF , il suit que S , espace décrit par le corps dans le tems τ , est à la hauteur d'une colonne d'eau sur la base EF égale à la quantité qui sort par EP , dans le tems T , ou $\tau. \frac{EF}{AB}$, en même raison.

544. Les mêmes conclusions suivent des principes décrits ci-devant, dans les articles 525 & 532. lesquels sont appliqués, d'une manière ingénieuse, à cette théorie, par M. Daniel Bernoulli, *Comment. Acad. Petrop. T. II.* qui paroît le premier avoir bien déterminé la manière, par laquelle le mouvement de l'eau, sortant d'un vase, est accéléré, lorsqu'on fait abstraction des empêchemens ci-dessus mentionnés. En supposant que la surface AB d'un fluide s'abaisse dans un vase, & que la Fluxion du tems est représentée par t , & celle de la hauteur AC par $-h$ comme ci-devant, la Fluxion du quarré de la vitesse d'un corps, qui descend librement dans la verticale, sera exprimée par $-2gh$; la Fluxion du quarré de la vitesse V , avec laquelle la masse de l'eau continue dans le vase, descend actuellement, par $-2fh$; (article 434.) & puisque la particule d'eau, qui sort à l'ouverture, dans le tems t , peut se représenter par $-h. AB$. Si nous supposons $-2gh. AB. AC + 2fh. AB. AC = -h. AB$, ($XX - VV$) (en conséquence de ce qu'on a démontré dans les art. 525 & 532.) il suit, que $2AC(g - f) = XX - VV$,

qui est à XX , comme $AB^2 - EF^2$ est à AB^2 . Donc, si KC est à AC , comme AB^2 est à $AB^2 - EF^2$, & que A soit la vitesse qui seroit acquise par la chute KC (enforte que AA soit à $2AC.g$ en même raison,) alors $2AC(g-f)$ sera à XX , comme $2AC.g$ est à AA , & $g-f$ à g , comme XX à AA ; ce qui s'accorde avec ce que nous avons trouvé dans les articles 537 & 541. d'une manière différente. Et cela est conforme avec ce qui a été donné par Newton, que quoique la pression sur EF soit, à la pression sur la base CD avant que l'orifice soit ouvert, comme l'aire EF est à l'aire CD , cependant lorsqu'on suppose que l'eau sort par EF , & qu'elle acquiert sa plus grande vitesse, la force, qui produit la vitesse $X-V$ dans l'eau en EF , est mesurée par la pesanteur de la cataracte $AMEFNB$, ou par une colonne du fluide de hauteur égale à $2HG. \frac{AB}{AB+EF}$, & de base égale à la section de la vitesse d'eau, après qu'elle est resserrée, c'est-à-dire, que la quantité de mouvement qui est produite dans l'eau, qui sort par EF d'une vitesse uniforme, est égale au mouvement qu'une telle colonne d'eau acquerroit en tombant librement, par sa pesanteur, dans un tems égal. Il n'a pas examiné de quelle manière l'eau est accélérée depuis le commencement du mouvement; mais si C représente la solidité de la cataracte $AMEFNB$, & qu'on suppose $C.(g-f) = EF.X.(X-V)$ force qui produit la vitesse $X-V$ dans l'eau qui sort par EF , alors, parce que C est à $2EF.HG$, comme AB à $AB+EF$, $X-V$ à X , comme $AB-EF$ à AB , & que AA est supposé à $2AC.g$, comme AB^2 à $AB^2 - EF^2$, il suit que XX est à AH , comme $g-f$ est à g , comme on l'a trouvé ci-devant.

545. La raison de l'action sur le fond du vase, à la force qui produit la vitesse $X-V$ dans l'eau qui sort par EF , (ou celle de $r-1$ à 1) qui a été déduite de la cataracte, d'après la Méthode de Newton, dans l'article 541. suit, de même, du principe décrit dans les articles 525 ou 532. Que P représente la première de ces deux forces, F la seconde; $P+F$ sera $= AB.AC.(g-f)$ (par ce qui a été démontré dans l'art. 537.)

qui est $= \frac{1}{2}AB.(XX-VV)$ ou $\frac{1}{2}AB.XX. \times \frac{(AB^2 - EF^2)}{AB^2}$

par ce qui a été conclu de ce principe, dans le dernier article. Mais $F = EF.X.(X-V)$ par l'article 537. ou $EF.XX.$

$\frac{AB - EF}{AB}$. Donc $P + F : F$ (ou $r : 1$) :: $\frac{1}{2} AB \times \frac{AB^2 - EF^2}{AB^2} : EF$.

$\frac{AB - EF}{AB}$, ou :: $AB + EF : 2 EF$, qui est la même raison déduite de la cataracte, dans l'article 541. & dans les Corollaires II. & V. *Prop. 36. Princip. Lib. II.* où l'eau est supposée avoir acquis sa plus grande vitesse.

546. On doit avouer néanmoins, que la précédente théorie concernant la manière dont l'eau, sortant par EF, est accélérée depuis le commencement du mouvement, ne doit pas être regardée comme exacte à tous égards, étant fondée sur l'hypothèse, que toutes les particules du fluide, au-dedans du vase cylindrique, descendent avec la même vitesse V, & que l'eau sortant par EF acquiert la vitesse X — V tout-à-la-fois, ce qui ne peut pas être supposé exactement vrai. L'accélération de V est semblable à celle d'un corps pesant, qui descend, par sa pesanteur, dans un milieu, qui résiste en raison doublée de la vitesse (la pesanteur relative du corps, dans le fluide, étant supposée = g) par ce qui a été démontré dans l'article 542. Et comme la Fluxion de la vitesse d'un tel corps, est la même au commencement de la chute, que si le corps tomboit librement par la pesanteur g; ainsi lorsque EF est ouvert au fonds du vase, si V ou X sont supposés commencer par zéro, AA—XX sera = AA au commencement du mouvement, & par conséquent $f = g$, en sorte que la Fluxion de V sera alors égale à la Fluxion de la vitesse avec laquelle l'eau, ou un autre corps, descend librement par sa pesanteur. D'où il suit, que, selon cette théorie, la pression sur le fonds du vase, est entièrement ôtée à l'instant où l'eau commence à sortir par EF; & comme on ne peut pas admettre cette conclusion, nous voyons, par cet exemple, que cette théorie ne doit pas être regardée comme parfaitement exacte. Il est bon cependant de suivre un peu plus loin cette spéculation, & de faire voir comment la Méthode, décrite dans les articles 537 & 541. peut s'appliquer à déterminer le mouvement de l'eau qui sort des autres vases.

547. Supposons maintenant un vase composé de deux cylindres; *abcd* & *ABDC*, & que *ab*, section de la partie supérieure, soit plus grande que *AB*. La vitesse de l'eau en EF étant représentée par X, & celle dans le vase *ABDC* par V, comme ci-devant, soit sa vitesse dans *abcd* représentée par G ij

Fig. 242

Z, & les forces par lesquelles V, Z & X sont accélérées par f , p & F respectivement; que les sections AB & ab soient représentées par B & C, les hauteurs AC & ac par b & c respectivement, & l'ouverture EF par O. Que la surface ACDB continuée en haut coupe le plan ab en LM. La force qui agit sur la surface CD, correspondante à celle qui est supposée (selon cette Méthode) produire la vitesse X — V, dans l'eau qui sort par EF, sera exprimée, comme dans l'art. 537. par $r.O.X.$ (X — V) ou (selon la raison de r à 1 qui a été déduite de la cataracte, dans l'article 541.) par $XX. \frac{BB - OO}{2B}$. De même, la force, qui produit la vitesse V — Z à la surface AB est $O.X.$ (V — Z) ou (parce que $V : Z :: C : B$ & $V : X :: O : B$) $XX. \frac{C - B}{C} \cdot \frac{OO}{B}$; & si cette force est augmentée en raison de $ab + AB$ à $2AB$, (conformément à l'article 541.) ou de $C + B$ à $2B$, nous aurons $XX. \frac{CC - BB}{2C} \cdot \frac{OO}{BB}$ pour l'action sur toute la surface cd , correspondante à celle qui produit la vitesse V — Z dans l'eau, pendant qu'elle passe du cylindre supérieur à l'inférieur, par la surface AB. Mais parce que toutes les particules de l'eau, qui sont dans la même section du vase, sont supposées, dans cette théorie, descendre avec des vitesses égales, & contribuer également aux actions du fluide, nous devons diminuer cette force en raison de AB à ab , ou de B à C, afin que nous puissions avoir sa partie $XX. \frac{CC - BB}{2B} \cdot \frac{OO}{CC}$ qui convient à la colonne LCDM. Donc, puisque la vitesse de l'eau en ACDB est accélérée par la force f , & en LABM par la force p , nous pourrions supposer $AC.AB.(g - f) + AL.AB.(g - p)$ ou $Bb(g - f) + Bc(g - p) = XX. \frac{BB - OO}{2B} + XX. \frac{CC - BB}{2B} \cdot \frac{OO}{CC}$, ou $XX.B \left(\frac{CC - OO}{CC} \right)$, c'est-à-dire, $\overline{b + c}.g - bf - cp = XX. \frac{CC - OO}{CC}$. Par conséquent si KC : LC (ou $b + c$) :: $ab^2 : ab^2 - EF^2$, ou :: CC : CC — OO, & que A marque la vitesse qui seroit acquise par la chute KC, on aura $XX : AA :: (b + c)g - bf - cp : (b + c)g$ & A fera la limite de toutes les valeurs de X. Les vitesses X, V & Z, & leurs Fluxions respectives sont en raison constante, enforte que $f : F :: v : x$, ou :: V : X, ou :: O : B. & $p :$

$F :: Z : X$, ou $:: O : C$. Donc $XX : AA :: g - F$.
 $\frac{O}{b+c} \times \left(\frac{b}{B} + \frac{c}{C} \right) : g$; ou si LC est représentée par H , &
 $\frac{bO}{B} + \frac{cO}{C}$ par K , $XX : AA :: gH - FC : gH$; par consé-
 quent si la Fluxion de X est représentée par x , & celle du
 tems par t , puisque x peut s'exprimer par Ft , il suit que t fera
 exprimé par $\frac{xK}{gH} \times \frac{AA}{AA - XX}$. Donc, si la vitesse A est repré-
 sentée par ab , (*Fig. 240. N. 2.*) & une moindre vitesse X par
 ad , & si l'eau est toujours fournie à la surface ab avec la vi-
 tesse Z , le tems, pendant lequel l'eau sortant par EF , acquiert
 la vitesse X , sera au tems de la chute de K en C , en raison
 composée du secteur hyperbolique can au triangle cab , & de
 K à H . Si nous avons supposé r à 1, comme l'aire CD à l'aire
 EF , (qui étoit l'hypothèse de Newton, dans la premiere Edi-
 tion de ses Principes,) on auroit dû prendre KC en même rai-
 son à $\frac{1}{2} LC$, comme $1 - \frac{O}{B} + \frac{O \cdot O}{B \cdot B} \times \frac{C - B}{C}$ est à 1, & A
 étant supposée égale à la vitesse qui auroit été acquise par la
 chute KC , la construction auroit été la même en d'autres
 égards.

548. Lorsque ab , supérieure section du vase, & l'aire de
 l'ouverture EF avec la hauteur LC subsistent, la chute KC
 & la vitesse A sont les mêmes, sans aucun égard à la raison de
 LA à AC . Donc, si l'on suppose que l'eau est continuellement
 fournie dans le cylindre $LCDM$ à la surface LM , avec une
 vitesse qui est moindre que V en une raison donnée, soit cette
 raison celle de LC , ou AB à ab , & si $KC : LC :: ab^2 :$
 $ab^2 - EF^2$, la plus grande valeur de X fera la vitesse acqui-
 se par la chute KC . Et si l'on suppose l'eau toujours fournie
 à la surface LM , sans aucune vitesse qui lui soit communi-
 quée, (mais qu'elle reçoit de l'eau d'embas, qui ne peut pas
 descendre sans elle) alors $KC = LC$, & la plus grande vitesse
 de l'eau en EF , sera celle qui auroit été acquise par la chute
 LC , hauteur de l'eau dans le vase au-dessus de EF .

549. Si les cylindres $abdc$, $ABDC$ ne communiquent Fig. 241
N. 2.
 entre-eux, que par une ouverture ef dans le plan AB , & si
 l'on fait abstraction de toute pression, au-dessus du côté inférieur
 du plan AB , on pourra déterminer le mouvement de l'eau, com-
 me dans l'article 647. L'action sur le plan CD correspondante

à la force qui produit la vitesse $X - V$ à l'ouverture EF sera exprimée, comme ci-devant, par $XX \cdot \frac{BB - OO}{2B}$. Si l'ouverture ef est représentée par o , & la vitesse en ef par Y , l'action sur la surface cd , correspondante à celle qui produit la vitesse $Y - Z$ dans l'eau qui sort par ef , se trouvera, comme ci-devant, (en substituant ef , ou o par AB ,) $= XX \cdot \frac{CC - oo}{2C} \cdot \frac{OO}{oo}$. Ce qui étant diminué en raison de CD à ab , ou de B à C , donne $XX \cdot \frac{CC - oo}{2CC} \cdot \frac{OO}{oo} B$, pour la partie de cette action qui appartient à la pesanteur de la colonne $LCDM$; & la somme de ces actions étant supposée égale à $Bb(g - f) + Bc$, ($g - p$) nous aurons $XX : 2gH - 2FK :: 1 : 1 + \frac{OO}{oo} - \frac{OO}{BB} - \frac{OO}{CC}$. Et la chute, par laquelle l'eau acquiert sa plus grande vitesse à l'ouverture EF est à H en même raison; d'où il suit (parce que F est mesurée par $\frac{x}{t}$) que cette raison étant mesurée par celle de 1 à m , la Fluxion du tems, où l'eau sortant par EF , acquiert la vitesse X , sera représentée par $\frac{2K}{m} \cdot \frac{AA - x}{AA XX}$, & que ce tems peut se déterminer par une construction semblable à celle de l'article 538. Lorsque le vase est supposé toujours plein à la hauteur LC , si O est fort petit comparé à B & C , alors $1 : m :: oo : OO + oo$. Et lorsque $ab = AB$, si l'eau n'est pas fournie dans le vase, la vitesse se détermine par la construction de l'article 540, en supposant que e représente $\frac{BB - OO}{OO} + \frac{BB - oo}{oo}$.

Fig. 243.

550. Lorsque le vase est composé d'un nombre de parties cylindriques, ou prismatiques, qui ont pour bases les aires B, C, D , &c. & pour leurs hauteurs respectives b, c, d , &c. alors, en procédant, comme dans l'article 547. les forces qui agissent sur les surfaces respectives B, C, D , &c. correspondantes à celles qui sont supposées, dans cette Méthode, produire l'augmentation du mouvement de l'eau en chaque surface, seront mesurées par $XX \cdot \frac{BB - OO}{2B} \times \frac{OO}{OO}$, $XX \cdot \frac{CC - BB}{2C} \cdot \frac{OO}{BB}$, $XX \cdot \frac{DD - CC}{2D} \cdot \frac{OO}{CC}$, &c. les parties de ces forces, qui doivent être attribuées à la pesanteur de la colonne qui appuie sur la base inférieure B , seront exprimées par $XX \cdot \frac{BB - OO}{2BB}$.

$$\frac{OOB}{OO}, XX. \frac{CC - BB}{2CC}. \frac{OOB}{BB}, XX. \frac{DD - CC}{2DD}. \frac{OOB}{CC},$$

&c. dont la somme est $XX. \left(\frac{B}{2} - \frac{OOB}{2SS} \right)$ si S est la section

supérieure du vase. Mais en supposant que $F, f, p, \&c.$ représentent les forces décrites dans l'article 547. la même somme est égale à $Bb(g - f) + Bc(g - p) + \&c.$ ou (supposant

$K = b \frac{O}{B} + c \frac{O}{C} + d \frac{O}{D}, \&c.)$ à $BHg - BKF$. D'où il

suit que $XX \frac{SS - OO}{2SS} = Hg - KF$, & que si A représente

la vitesse qui seroit acquise par une chute égale à $\frac{SSH}{SS - OO}$,

XX sera à AA , comme $Hg - KF$ est à Hg ; en sorte que si l'eau est toujours fournie à la surface S avec la même vitesse par laquelle elle s'abaisse en S , lorsque F est supposée s'évanouir, ou que l'eau en EF a acquis sa plus grande vitesse, x est

égal à A . La Fluxion du tems est exprimée par $\frac{K}{gH} \cdot \frac{AAx}{AA - XX}$,

ou x représente la Fluxion de X , & par conséquent le tems se détermine, comme dans l'article 538. par les aires hyperboliques, ou logarithmes. Lorsque l'eau n'est pas supposée fournie dans le vase, soit D la chute, par laquelle la vitesse X de l'eau en EF , seroit acquise; d la Fluxion; $-h$ la Fluxion de H hauteur de l'eau dans le vase au-dessus de l'orifice; XX étant égal à $2gD$, (article 434.) ou Xx à gd , vitesse avec laquelle la

surface de l'eau s'abaisse, ou $X. \frac{O}{S}$ étant représenté par $\frac{-h}{t}$,

F par $\frac{x}{t}$ ou $\frac{-god}{hS}$ & $XX \frac{SS - OO}{2SS} = Hg - KF$, par ce

qui a été démontré; il suit, que d , Fluxion de D , est à $-h$ Fluxion de H , comme $H - D. \frac{SS - OO}{SS}$ est à $K \frac{O}{S}$, où S

marque toujours l'aire de la surface supérieure de l'eau, O celle de l'orifice, H la hauteur de l'eau dans le vase au-dessus de O , D la chute par laquelle la vitesse X seroit acquise, & K est supposée égale à la somme des produits de la hauteur de chaque partie du vase qui contient l'eau, par la raison de l'orifice à l'aire de la section de cette partie. On s'apperoit aisément, que les mêmes conclusions ont lieu, lorsqu'un vaisseau droit est terminé par une figure curviligne, en supposant que K représente l'aire d'une figure, dont l'ordonnée, à chaque point de l'axe, est à 1 , comme l'aire de l'orifice est à la section du vase en

ce point : & cela s'accorde avec ce que le Sçavant Auteur ci-devant cité, a conclu du principe décrit dans les articles 525 & 532. Lorsque quelques sections du vase croissent, en quelque partie de haut embas, vers l'orifice ; cette théorie suppose qu'il y a une action de l'eau de bas en haut, pendant qu'elle passe des parties étroites aux parties plus larges du vase ; & en ce cas, le mouvement de l'eau ne paroît pas déterminé aussi exactement par cette théorie ; voyez l'article 527. On peut faire là-dessus plusieurs autres observations, mais notre dessein nous oblige à passer à d'autres sujets.

551. Il y a plusieurs autres principes qui ont rapport au centre de gravité des corps, outre les précédens, & qui sont en usage dans la résolution des Problèmes. Lorsque deux puissances soutiennent un corps, ou une figure qui est supposée graviter, une ligne droite qui passe par son centre de gravité, perpendiculairement à l'horison, passe par l'intersection des directions d'action de ces deux puissances, lesquelles, avec la pesanteur de la figure, sont en même raison les unes aux autres, que trois lignes droites formant un triangle, & parallèles aux directions respectives de ces puissances. Par-là on découvre la nature de la figure que l'on prend pour une chaîne pesante, ou une ligne parfaitement flexible, suspendue par deux de ses points. Soit FEH une telle ligne ; F son point le plus bas, où la tangente FT est parallèle à l'horison ; ED une ordonnée du point E à l'horizontale AD ; ET la tangente en E qui coupe FT en T , & G le centre de gravité de la portion FE de la ligne ou chaîne. Les trois puissances sont, la pesanteur de la chaîne qui agit dans la verticale, & les puissances en F & E , qui retiennent ces extrémités de la chaîne, agissant par les tangentes FT & ET , & sont égales à la tension de la chaîne en ces points. Donc, par ce principe, la verticale qui passe par T , & si EI , parallèle à AD ou FT , rencontre TG en I , le poids de la partie de la chaîne FE fera à la tension de la chaîne en F , comme IT à EI , ou (par la Proposition XIV.) comme la Fluxion de l'ordonnée DE à la Fluxion de la base AD ; par conséquent la tangente de l'angle IET , par lequel la courbe coupe une parallèle à l'horison en chaque point E , est toujours comme le poids de la portion FE de la chaîne qui est entre E & le plus bas point F ; la tension de la chaîne, en chaque point E , est à sa tension en F , comme ET est à EI , (par les mêmes principes)

cipes) ou comme la Fluxion de la courbe à la Fluxion de la base, & elle est comme la sécante de l'angle IET. Nous examinerons dans la suite, ce sujet, d'une manière plus générale. Lorsqu'un corps, ou un nombre de corps liés ensemble, sont suspendus en quelque manière, leur centre commun de gravité descend aussi-bas qu'il est possible, & par-là on a résolu de quelques Problèmes de *maximis & minimis*; mais nous en parlerons ci-après, & nous nous bornerons ici à quelques observations générales sur les Chapitres X. & XI. d'où nous tirerons quelques principes généraux, qui peuvent servir à résoudre des Problèmes Philosophiques de différente espèce.

552. On a observé ci-devant, dans l'article 312. que l'on considéroit l'asymptote de la tranche d'une courbe, comme la tangente de son extrémité infiniment éloignée. Dans la Proposition XXVI. pendant que P décrit la branche qui s'approche de l'asymptote RX, que CP & SP rencontrent RX en *m* & *n*; pendant que les lignes CP & SP, en roulant, deviennent parallèles l'une à l'autre & à RX, leurs vitesses angulaires sont dans la dernière raison des angles PCx & PSy, ou de C*m*R & S*n*R, & par conséquent en raison de CR à SR; en sorte que SQ est à CQ, comme CR est à SR, & CR = SQ: & l'on peut ainsi abréger la démonstration de la 26^e Proposition, dont on a fait voir l'usage dans plusieurs exemples, Chapitre X.

Fig. 117.
Pl. XXV.

553. Les Propositions du Chapitre XI. concernant la courbure des lignes & sa variation, peuvent, de même, se démontrer brièvement, par les limites des raisons. Que TR, parallèle à EB, rencontre la courbe EMH en M, le cercle ERB en R, & leur commune tangente en T, comme dans la Proposition XXXII. alors, supposant ET continuellement diminuée jusqu'à disparaître, la dernière raison de TM à TR fera la raison de courbure de la ligne EM en E, à la courbure uniforme du cercle ERB; & les rayons de courbure seront en raison inverse. Lorsque cette raison est celle d'égalité, aucun cercle ne peut passer entre EM & ER, en-dedans de l'angle d'attouchement REM, & ERB est le cercle de courbure en E. Puisque TM, ET & TK sont supposés en proportion continue, (article 366.) & que ET représentant la Fluxion de la courbe, TM est la dernière mesure de la moitié de la seconde Fluxion de l'ordonnée, & TK se confond enfin

Fig. 149.

avec EB ; il suit que les droites, qui mesurent la seconde Fluxion de l'ordonnée, & la premiere Fluxion de la courbe, & $\frac{1}{2}EB$, sont en proportion continue, comme on l'a fait voir beaucoup plus au long dans la Proposition XXXIII. Lorsque nous parlons de la raison d'une Fluxion à une fluente, nous entendons toujours la raison des lignes droites qui les représentent.

554. Les angles d'attouchement sont dans la dernière raison de leurs soutendantes, lorsque les arcs ou leurs tangentes, sont supposés égaux, ou diminués continuellement jusques à disparaître, si les soutendantes sont inclinées à angles égaux avec ces tangentes. On a fait voir, dans l'article 369. que RM soutendante de l'angle d'attouchement MER compris par la courbe EM , & par le cercle de courbure ER , étoit comme KQ directement, & le rectangle KTQ réciproquement, ET étant donnée. Donc lorsque EB est le diamètre du cercle de courbure, & que BV , tangente de BK , n'est pas parallèle à ET , l'angle d'attouchement MER est comme la tangente de l'angle BVE directement, & le carré du rayon de courbure réciproquement; & lorsque la courbure en E est donnée, l'exposant de la variation de courbure, (selon l'explication de Newton) est comme l'angle MER . Lorsque la courbe BK touche le cercle BQ en B , si C & O sont les centres respectifs de courbure de BQ & BK en B , alors KQ est comme OC directement, & le rectangle $OB C$ réciproquement, & l'angle d'attouchement MER est comme OB directement, & CB^4 réciproquement; & lorsque les arcs EM & em sont semblables en ce cas, l'angle MER est à mer en raison triplée de Eb à EB . l'angle d'attouchement, par exemple, compris par la parabole, & le cercle à son sommet est réciproquement comme le cube du parametre de l'axe. Lorsque l'attouchement de BK & BQ est d'un ordre marqué par n , selon l'explication de l'article 369. l'angle MER , dans les arcs semblables, est réciproquement comme la puissance du rayon de courbure, dont l'exposant est $n-2$.

Fig. 152.

Fig. 245.

555. Le reste subsistant, soit MN perpendiculaire à la tangente en M , & que Md , perpendiculaire à la corde EM , rencontre le rayon de courbure EC en d . La dernière raison de EN au rayon de courbure EC , & de Ed à $2EC$ sera une raison d'égalité. Car, $Ed : TK :: EM^2 : ET^2$ & l'excès de Ed sur

TK est à TK, comme TM^2 à ET^2 , ou MTK, c'est-à-dire, comme TM est à TK. Donc l'excès de Ed sur TK est toujours égal à TM, lequel excès dispaçoit avec ET, lorsque TK se confond avec EB. La Fluxion de Ed est égale à celle de TK, lorsque M part de E, & elle peut servir à mesurer la variation de courbure en E, par les articles 360 & 386.

556. Un arc étant donné, le centre de sa courbure est la limite des intersections des lignes droites, qui coupent également & perpendiculairement, les côtés des figures rectilignes inscrites ou circonscrites, lorsque cet arc (avec ces figures) sont diminués continuellement jusques à dispaître; c'est aussi la limite des intersections des lignes droites, qui divisent également les angles de ces figures. Mais l'intersection des lignes droites, perpendiculaires à ces côtés à leurs extrémités, ne se confonde pas à la fin avec le centre de courbure. Que ux divise également une corde Mm perpendiculairement en u , & rencontre le rayon de courbure EC en r , C fera la limite de toutes les situations du point r , lorsque l'arc EMm est supposé diminué jusques à dispaître. Mais si ms , perpendiculaire à Mm en m , rencontre EC en S , la dernière raison de ES à EC sera la même que la dernière raison de Em à $EM + \frac{1}{2}Mm$, enforte que si $Em : EM :: m : n$, la dernière raison de ES à EC sera celle de $2m$ à $2m - n$. Fig. 246.

557. Supposant, comme ci-devant, que ET est tangente de EM en E, TM soutendante de l'angle d'atouchement parallele à EB, que TK est toujours $= \frac{ET^2}{TM}$ & que FK, lieu du point K, coupe EB en B; il est clair que ET étant supposée diminuée continuellement jusques à dispaître, alors TK se confond avec EB, & cela semble suffire pour justifier l'expression de ceux qui disent que EB est la dernière valeur de $\frac{ET^2}{TM}$, qui est supposé toujours $= TK$. Mais si l'on objecte, que ET dispaissant, TM dispaît de même, la raison de ET à TM n'est pas assignable, & la valeur de $\frac{ET^2}{TM}$ est par conséquent inconcevable ou imaginaire. Pour répondre à cela, il faut observer : 1°. que rien n'est plus ordinaire en Géométrie que de déterminer les points d'une figure, par ceux d'une autre, avec une construction ou équation, comme, dans ce cas, chaque point K dans FKB, par les points correspon- Fig. 245.

H ij

dans M dans HME, en supposant toujours $TK = \frac{ET^2}{TM}$; que le point, dans la premiere qui correspond à E dans la seconde, ne peut pas être autre que B où le *lieu* FKB coupe EB; qu'on doit dire que EB est la dernière valeur de $\frac{ET^2}{TM}$, ou dire seulement que $\frac{ET^2}{TM} = TK$ avec l'exception singulière du cas où T tombe sur E: & comme cela ne s'est jamais dit, ou qu'il n'a jamais paru nécessaire d'exiger une exactitude aussi scrupuleuse; ainsi il ne paroît pas raisonnable de blâmer l'Auteur de cette Méthode, de ce qu'il fait usage d'une expression convenable & concise, qui n'est pas exposée à de plus grandes difficultés, que celles dont on n'a point tenu de compte avant son tems. Lorsque EMH est un arc d'un demi-cercle décrit sur le diamètre EB, FKB est un arc du même demi-cercle, & $\frac{ET^2}{TM}$ est toujours généralement $= TK$, ou $= EB - TM$ sans excepter aucun cas particulier; d'où il suit que puisque $EB - TM$ devient égal à EB, lorsque ET & TM disparaissent, la dernière valeur de $\frac{ET^2}{TM}$ est EB. Mais il n'est pas nécessaire d'employer dans aucune partie de la Géométrie des expressions sujettes à contestation, & le même Auteur nous a fait voir comment nous pouvons les éviter en ce cas. Car, nous pouvons considérer EB comme la dernière valeur de TK, en le considérant seulement comme la limite des valeurs de $\frac{ET^2}{TM}$ lorsque ET est diminué continuellement jusques à disparaître; & l'on doit toujours sous-entendre cette limite, lorsqu'on parle de la dernière valeur d'une quantité qui est déterminée de cette manière par d'autres qui disparaissent en même tems. Il ne peut pas y avoir une inflexion, ou courbure en un point, & la courbure en E a certainement une dépendance des valeurs de $\frac{ET^2}{TM}$ lorsque ET & TM sont réelles, mais ce n'est seulement qu'autant que la valeur de leur limite EB dépend de ces valeurs; car on a fait voir, dans la Proposition XXXII. que pour déterminer la courbure en E, (comme elle a été définie dans l'article 364.) il suffit de fixer la distance EB. Il n'y a qu'un de ces Problèmes qui se rencontre souvent, qui est de déterminer l'intersection d'une courbe avec une droite donnée. Et parlant généralement, il est plus aisé de déterminer le point.

B que l'interfection de FKB avec une autre parallele à TK.

558. Lorsque S est un point donné dans EB, que SM rencontre la tangente ET en I, IM fera à TM, comme SI à SE qui est à la fin une raison d'égalité. Par conséquent la dernière valeur de $\frac{ET^2}{IM}$ est la même que celle de $\frac{ET^2}{TM}$ & est = EB; on doit dire la même chose de $\frac{EM^2}{IM}$ ou $\frac{EM^2}{TM}$. Fig. 245.

559. Les tangentes de la développée a CI, interceptées par AEM, donnent une échelle convenable des rayons de courbure de celle-ci. Et si ces rayons CE, QM sont divisés en Z, z, en sorte que CZ soit toujours à EZ, en raison constante de m à n, & que la tangente du lieu de Z rencontre ET, perpendiculaire à CE en t, la variation de courbure en E, sera toujours comme $\frac{z}{m} \times$ tangente EtZ. Car que l'arc Zx, décrit du centre C, rencontre QM en x, la dernière raison de EM à Zx sera celle de EC à ZC, & parce que zx est à la fin = CQ + CZ — Qz, & Qz — CZ : QM — CE, (ou CQ) comme CZ : CE, la dernière raison de zx à CQ est celle de EZ à EC. Donc la dernière raison de zx à Zx est celle de CQ.EZ à EM.ZC, ou de n.CQ à m.EM. Par conséquent la dernière raison de CQ à EM, ou de la Fluxion du rayon de courbure CE à celle de courbure AE, (laquelle raison mesure la variation de courbure) est celle de m.zx à n.Zx, ou de m.EZ à n.Et, ou de $\frac{m}{n} \times$ tangente EtZ au sinus total. Il est aisé de démontrer, par l'article 384. que dans toutes les figures où le sinus de l'angle compris par l'ordonnée, & la courbe est comme une puissance de l'ordonnée dont l'exposant est un nombre r, (comme, par exemple, dans la cycloïde, la chaînette, la courbe élastique, &c.) le rayon de courbure EC rencontre toujours la base en Z, de sorte que EZ est à EC, en raison constante de 1 à r; par conséquent la base étant le lieu de Z, la variation de courbure, dans ces figures, est comme $\frac{r-1}{r} \times$ cotangente de l'angle compris par l'ordonnée & la courbe. Fig. 180.

560. Lorsque EMH est décrite par une pèsanteur qui agit en E dans la direction EB, soit EK l'espace qui seroit parcouru par un corps, qui tombe de E dans la droite EB par la pèsanteur en E, continuée uniformément dans le même tems,

que la tangente ET , est parcourue par le mouvement dans la trajectoire en E ; ce tems étant donné, la pèsanteur en E sera mesurée par $2EK$, parce que toute force est mesurée par le mouvement qu'elle produiroit dans un tems donné, & qu'un espace $= 2EK$ feroit parcouru par le mouvement acquis en K , dans le tems que le corps descendant de E en K parcourt EK , par l'article 95. Mais lorsque ET est continuellement diminuée jusques à disparaître, la dernière raison de TM à EK est une raison d'égalité, & la vitesse dans la trajectoire étant mesurée par ET , la pèsanteur en E sera la dernière raison de $2TM$. Dans ces sortes de recherches, on commence ordinairement par considérer le mouvement uniforme dans les cordes mE , EM inscrites dans la figure, ou dans ses tangentes, & de concevoir la pèsanteur, comme appliquée tout-à-la-fois à l'angle E . Que RM , parallèle à EB , rencontre la corde mE prolongée en R , & la tangente du point E en T , la dernière raison de RM à $2TM$ fera une raison d'égalité, & la pèsanteur en E sera en dernière raison de RM , ou $2TM$, soit qu'on la conçoive comme agissant tout-à-la-fois en E , (comme dans la *Prop. XXX. du Liv. III. des Princip. Edit. 3.*) ou comme agissant continuellement, la vitesse en E étant dans la dernière raison de ET , ou EM . Que EM , côté de la figure inscrite, soit divisé également en L , l'angle ELd étant supposé égal à MTE , que Ld rencontre EB en d , les triangles MTE , ELd étant semblables, Ed se confondra à la fin avec Eb , moitié de la corde de courbure EB , & la dernière raison du rectangle $RM.Eb$ à EM^2 fera une raison d'égalité; ou les rectangles sous la demi-corde de courbure, & la droite qui mesure la pèsanteur $=$ au carré de celle qui mesure la vitesse en E , comme dans l'article 464.

561. De même, si nous supposons que mEM est un arc d'une ligne, ou chaîne parfaitement flexible, que n marque la section de cette chaîne en E perpendiculaire à sa longueur, EK la force accélératrice de la pèsanteur en $E:n.EK.EM$ exprimera la pèsanteur absolue d'une chaîne uniforme, égale en longueur à EM d'une base égale à n , qui est poussée par la force EK ; & elle est à la fin égale à la pèsanteur absolue de la portion EM de la chaîne; par conséquent la tension de mEM en E se mesure par la dernière valeur de $n.EK.EM \times \frac{EM}{RM}$, ou

de $n.EK.Eb$, & elle est égale à la pesanteur d'une chaîne égale en longueur à Eb ; de la même épaisseur que AEB en E étant poussée par une pesanteur uniforme égale à EK .

562. Soit E un point dans IL ligne droite donnée de position, A un point donné hors de IL ; joignez AE , & que AC , perpendiculaire à AE , rencontre IE en C . Si l'on suppose que le point E se meut dans IL , & que C reste immobile, AE & CE flueraient proportionnellement, c'est-à-dire, que la Fluxion de AE sera à celle de CE , comme AE à CE . Car, soit AK perpendiculaire à IL en K , la Fluxion de AE sera à celle de KE , comme KE est à AE , (par la Proposition XV.) ou :: $AE : CE$ & la Fluxion de CE est égale à celle de KE lorsque C est fixe. Lorsqu'on prend le point A sur un arc quelconque décrit du centre C , & que AE , tangente de cet arc en A , rencontre le diamètre IL donné de position en E , le point A étant supposé fixe, si E se meut dans la droite CE , la Fluxion de AE sera toujours à celle de CE , comme AE à CE . La converse est que si la Fluxion de AE est toujours à celle de CE , comme AE à CE , le point A étant pris sur un arc circulaire, & E étant supposé se mouvoir dans CE , C est le centre de cet arc. En général, soit la Fluxion de AE toujours à celle de cE , comme AE à cE , les points A & c restant immobiles, si pendant que le point A s'approche de la droite IL jusques à se confondre avec elle, le point c s'approche de C , comme de la limite de ses différentes positions, C est le centre de courbure de la ligne sur laquelle A est supposé se mouvoir, ou point de cette courbe où A tombe sur IL .

563. Ces observations nous conduisent à quelques Propositions générales, relatives aux recherches Philosophiques, que nous allons mettre sous les yeux, afin de faire mieux sentir l'analogie qui est entre-elles. La première, donne la propriété des trajectoires décrites par des forces centripètes, quelque variables que soient ces forces, ou quelles que soient leurs directions : la seconde, donne une semblable propriété générale des lignes de la plus vite descente : la troisième donne la propriété des lignes parcourues en moindre tems qu'aucune autre d'une égale longueur : & la quatrième, donne la propriété de la figure que prend une ligne ou chaîne flexibles, en conséquence des forces quelconques qui agissent sur elle. Soit AEB un arc de l'une de ces lignes, HEh une droite dans la direction de la puissance

Fig. 248

Fig. 249.

ce EK , qui résulte de la composition de plusieurs forces qui sont supposées agir en E , & soit une perpendiculaire abaissée du point O , centre de courbure en E , qui rencontre HE en C .

1°. La vitesse dans la trajectoire en E , est égale à celle qui seroit acquise par une chute égale à $\frac{1}{2} CE$; par une pesanteur uniforme égale à EK , force qui agit sur E . Et si l'on suppose qu'un corps part de E dans la droite HEh avec une vitesse égale à celle dans la trajectoire en E , & que son mouvement est accéléré, ou retardé par les mêmes puissances qui agissent en E , sa vitesse & sa distance de C croîtront proportionnellement; c'est-à-dire, que la Fluxion de la droite V , qui représente sa vitesse, est à la Fluxion de sa distance à C , comme V est à CE . ou, en d'autres termes, si EN , ordonnée de la figure HNG , mesure sa vitesse en quelque point, comme E de Hh , & que NT , tangente de HNG en N , rencontre Hh en T , la soûtangente ET sera égale à EC du côté opposé de E .

2°. La vitesse, dans la ligne de la plus vite descente AEB en E , est égale à celle qui seroit acquise par une pesanteur uniforme égale à EK , force qui agit en E par une chute égale à $\frac{1}{2} CE$. La courbure de cette ligne en E est égale à celle de la trajectoire, qui seroit parcourue par un corps jetté de E , dans la direction de la tangente de AEB avec la vitesse acquise sur AEB en E , & qui est poussé par la même force EK . En ce cas, V & CE fluent, de même, proportionnellement; ou ET soûtangente de la figure HNC , & EC demie-corde de la courbure se confondent ensemble.

3°. Lorsque la somme ou la différence du tems dans lequel la ligne AEB est parcourue, & du tems où elle auroit été parcourue par un mouvement uniforme avec une vitesse donnée est un *minimum*, la ligne AEB est parcourue dans un moindre tems, qu'aucune ligne de même longueur entre les mêmes extrémités AEB . Et c'est une propriété de ces sortes de lignes, que si un corps sort de E avec la vitesse u acquise en E , en EH ou Eh , la Fluxion de u sera à celle de la distance à C en raison composé de u à CE , & de la somme ou de la différence de b , & u à a , b & a étant supposées représenter des vitesses invariables. On peut découvrir, par des principes analogues à celui-ci, la nature de la ligne parcourue en moindre tems, qu'aucune ligne qui renferme la même aire AEB sous la corde AB dans quelque hypotese de pesanteur, & résoudre d'autres

d'autres Problèmes de cette espece concernant les figures isopérimetres.

4°. Lorsque AEB est une ligne ou chaîne inflexible, sa tension en E est égale au poids d'une chaîne qui est en longueur égale à CE , d'une épaisseur uniforme égale à celle de AEB en E , & qui est poussée embas par une pèsanteur uniforme égale à EK , force qui résulte de la composition de plusieurs puissances qui agissent sur E . Soit A un point donné dans la chaîne AEB , Aa égal à la moitié de la corde de courbure en A , étant dans la direction de la force qui agit sur la chaîne en A . Soit $E k$ toujours à EK , force qui agit sur un point E , comme la section de la chaîne en E , sa section en A , & que la direction de la force $E k$ soit contraire à celle de EK ; si un corps sort de A avec une juste vitesse, (c'est-à-dire; celle qui seroit acquise par une chute égale à Aa , par une pèsanteur uniforme égale à la force qui agit en A ,) & que pendant qu'il se meut le long de la courbe AEB , son mouvement soit toujours accéléré, ou retardé par les forces représentées par $E k$, la tension de la chaîne, en chaque point E , fera toujours en raison doublée de la vitesse acquise en E ; qui est la même vitesse qui auroit été acquise par la chute CE avec une pèsanteur uniforme égale à la force $E k$. Et si un corps est jetté de E avec cette vitesse dans la direction de la tangente de AEB , la courbure en E , de la trajectoire, qui seroit parcourue par la force $E k$, fera la moitié de la courbure de la chaîne en E .

Fig. 249.
N. 2.

564. Le premier de ces Théorèmes se tire aisément de ce qu'on a démontré ci-devant, dans les articles 464 ou 560. Car la Fluxion de la vitesse EN étant en raison composée de la force EK , & de la Fluxion du tems, qui est comme la Fluxion de la distance CE directement, (le point C étant supposé rester fixe) & comme la vitesse réciproquement, il suit que la Fluxion de EN est à la Fluxion de CE , comme EK est à EN , ou comme EN est à EC ; mais la Fluxion de EN est à celle de CE , comme EN est à ET : donc $EC = ET$. Mais nous étant fort étendus sur cette matiere, dans le dernier Chapitre, nous n'avons rappelé ici ce Théorème qu'à cause de son analogie avec le reste.

565. Soient A & B deux points donnés, IL une droite qui coupe AB perpendiculairement & également en K ; il est clair que si un corps doit se mouvoir de A en B , dans un moindre

Fig. 250.

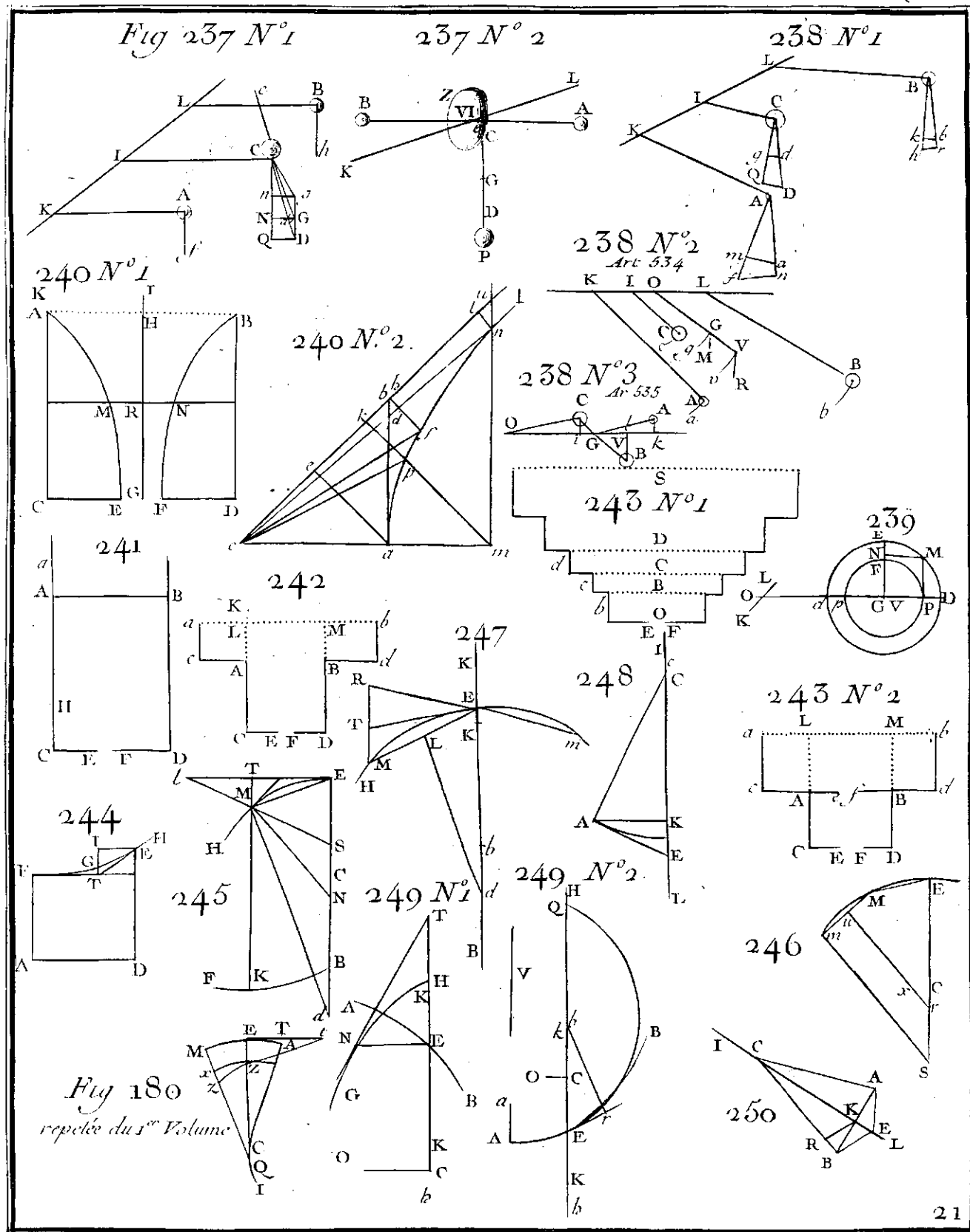
tems avec un mouvement uniforme donné, il doit décrire la droite AB , & s'il doit se mouvoir de A vers la droite IL , dans le tems le plus court, il doit décrire la perpendiculaire AK . Mais E étant un point sur IL , joignez AE & BE ; si nous supposons que le corps doit décrire AEB d'un mouvement uniforme, mais avec une vitesse qui est toujours comme CE , distance de E à C point donné sur IL , le mouvement ne se fera pas dans le moindre tems lorsque E tombe sur K , mais lorsque AE est perpendiculaire à AC . Car, soit KR , parallèle à BE , qui rencontre CB en R ; le tems, pendant lequel AE est parcourue, sera toujours directement comme AE , & réciproquement comme la vitesse CE ; c'est-à-dire, que le tems sera comme KR , puisque $KR : KC :: AE : EC$, & que KC est donné. Mais KR est moindre lorsqu'elle est perpendiculaire à BC ; donc AE est parcourue dans un moindre tems lorsqu'elle est perpendiculaire à AC . Il suit, au contraire, que si AE , ou AEB est parcouru dans un moindre tems, & que la vitesse soit comme la distance de E à quelque point sur IL , ce point sera C , ou AC , perpendiculaire à AE , coupe IL . Et cela, avec l'article 562. fournit la propriété générale de la courbure des lignes de la plus vite descente : que si IL rencontre cette ligne en E , & que la vitesse dans IL soit comme la distance à C , ou plus généralement, si (le point C subsistant) lorsque CE croît ou décroît, la vitesse en E commence à fluer en même proportion que CE , l'inflexion de la ligne de la plus vite descente en E , sera telle qu'elle aura le centre de sa courbure en C . Dans cette recherche de la courbure de la ligne de la plus vite descente, nous concevons AE & EB non pas comme les cordes entières qui forment la figure rectiligne inscrite dans cette courbe, (ou comme les tangentes entières qui forment les figures circonscrites,) mais seulement leurs moitiés, & que deux telles parties successives, sont parcourues uniformément avec la vitesse qui appartient à leur intersection E , qui est à la fin la vitesse moyenne dans l'arc, & le centre de courbure doit être démontré par la dernière intersection des perpendiculaires AC , BC , l'une avec l'autre, ou avec IL qui divise également l'angle AEB , selon l'article 562. Mais la nature de la ligne, de la plus vite descente, peut se déterminer plus aisément que par cette propriété, lorsque la pesanteur agit par des lignes parallèles, ou est dirigée vers un

centre donné, & pour mettre cette théorie au plus grand jour, nous en traiterons aussi-bien que des Problèmes plus élevés sur les questions de *maximis* & *minimis*, dans un Chapitre séparé.

566. La première partie du quatrième Théorème qui a été proposé dans l'article 563. a déjà été démontrée dans l'article 561. sçavoir, que la tension de la ligne, ou chaîne AEB, en un point E, est égale au poids d'une chaîne de même épaisseur que AEB, & d'une longueur égale à EC, & qui est pressée par une pesanteur uniforme EK, & par conséquent mesurée par le rectangle kEC. Quant à la seconde partie, soit kr perpendiculaire à la tangente de AEB en E; soit V une droite déterminée par les forces Ek, comme dans l'article 435. enforte qu'elle représente la vitesse qu'un corps est supposé acquérir en E, pendant qu'il se meut le long de AEB, de la manière décrite dans le Théorème; puisque Er est la force par laquelle cette vitesse est accélérée ou retardée, le rectangle compris sous Er, & la Fluxion de la courbe AE, mesurera la Fluxion de $\frac{1}{2}VV$. Mais puisque Ek est en raison composée de la force EK, & de l'épaisseur de la chaîne en E, Er est la force par laquelle la tension de la chaîne croît depuis le point E, & le rectangle sous Er, & la Fluxion de la courbe AE, mesurera la Fluxion de la tension en E, ou du rectangle kEC. Donc, puisque $\frac{1}{2}VV$ est supposé égal au rectangle kEC, lorsque E tombe sur A, ils seront toujours égaux l'un à l'autre. Que Ek rencontre en Q le cercle qui est en E, de même courbure que la trajectoire décrite par la force Ek, lorsque le corps est jeté de E avec la vitesse V dans la direction Er; par ce qui a été démontré ci-devant, si EQ est divisée également en b, le rectangle bEk sera égal à VV, & par conséquent à 2CE.Ek. Donc Eb est = 2EC ou la courbure de la trajectoire en E est la moitié de la courbure de la chaîne en E.

567. Lorsque EK est une force centripète, ou centrifuge, dirigée vers un point donné, prenez SM sur SA toujours égal à SE; que l'ordonnée MN de la figure adNM soit toujours égale à Ek; si l'aire aAgd est égale à $\frac{1}{2}VV$ lorsque le corps part de A, ou si elle mesure la tension en A, l'aire adNM mesurera toujours $\frac{1}{2}VV$, ou la tension en chaque point E. Et si SP est perpendiculaire à la tangente de la chaînette AEB en E; cette perpendiculaire SP fera toujours réciproquement

comme l'aire $adNM$; ou comme la tension en E , ou comme VV quarré de la vitesse acquise en E . Car, puisque la Fluxion de SE est à celle de la courbe AE , comme Er est à Ek , il suit que la Fluxion de $\frac{1}{2}VV$ est égale au rectangle sous Ek , & sous la Fluxion de SE ; enforte que la Fluxion de V est à celle de SE , comme Ek est à V , ou comme $\frac{1}{2}V$ à EC . Mais la Fluxion SE est à celle de SP , comme EC est à SP , par l'article 384. Donc la Fluxion de V est à celle de SP , comme $\frac{1}{2}V$ est à SP , & puisque SP décroît pendant que V croît; il s'ensuit que SP est réciproquement comme VV , ou comme $adNM$. Par où l'on voit l'analogie entre ces figures & les trajectoires, parcourues par des forces centripetes ou centrifuges: dans les unes, SP , perpendiculaire du centre S sur la tangente de la trajectoire, est réciproquement comme la vitesse du corps qui la décrit; au lieu que dans les autres, SP est réciproquement comme le quarré de V , vitesse du corps qui se meut le long de la courbe, lorsque la direction de la force est chargée selon le quatrième Théorème, article 563. Si la force EK est invariable, par exemple, & que la chaîne soit d'une épaisseur uniforme, & si Sa disparoit, (c'est-à-dire, si la tension en A est égale au poids d'une chaîne de même épaisseur que AEB en A , égale en longueur à SA , & qui est poussée embas par une pesanteur uniforme égale à la force EK ,) SP est réciproquement comme SE , & par conséquent AEB est une hyperbole équilatere, comme M . Herman l'a remarqué. Mais AEB n'est pas toujours une telle hyperbole, lorsque la force vers S est uniforme, comme ce Scavant Auteur paroît le penser. Car, lorsque la tension en A est différente SP , est réciproquement comme aM , ou $SE \mp Sa$. De même, lorsque la chaîne est d'une épaisseur uniforme, & que EK est une force centrifuge, qui est réciproquement comme le quarré de la distance à S , & que la tension en A est égale au poids d'une chaîne de même épaisseur, égale en longueur à SA , & qui est poussée par une pesanteur uniforme égale à la force en A , AEB est un arc d'une spirale logarithmique. Lorsque la force EK est centrifuge, & réciproquement comme le cube de la distance à S , AEB dans un cas semblable est un arc d'un demi-cercle décrit sur le diamètre SA ; & lorsque EK est comme quelque autre puissance de la distance, AEB est dans des cas semblables, une des figures construites dans les articles 392 ou 393.



568. Lorsque la force EK agit par des lignes parallèles, le sinus de l'angle DEP , compris par la courbe, & l'ordonnée qui est en direction de la force, est réciproquement comme VV , ou comme l'aire $adNM$, ou comme la tension en E . Si la force EK est uniforme, que ED , dans la direction des forces, rencontre ad en D , le sinus de DEP étant réciproquement comme aM ou DE , DP , perpendiculaire à EP tangente en E , sera invariable. Dans cette figure, le rectangle kEC est égal à $aM.Ek$, & EC est égal à aM , ou DE , & le rayon de courbure EO étant à EC , (ou DE) comme DE est à DP , EO est réciproquement comme le carré du sinus de l'angle DEP . Fig. 252

569. Lorsque la force EK est perpendiculaire à la courbe, elle n'a point d'action sur V , en sorte que V , dans ce cas, est constante, & que la tension est la même dans toutes les parties de la figure, & EC (qui, dans ce cas, est le rayon de courbure) sera réciproquement comme la force qui agit en E . Cette force dans la *Velaria* (selon M. Bernoulli) est comme le carré du sinus de l'angle où les ordonnées coupent la courbe; en sorte que le rayon de courbure est réciproquement comme ce carré, & la *Velaria* doit se confondre avec la chaînette ordinaire, par ce qui a été observé à la fin du dernier article. Dans la courbe élastique la force EK est comme l'ordonnée, & le rayon de courbure réciproquement comme l'ordonnée.

570. Lorsqu'une puissance EI est toujours perpendiculaire à la courbe, & une force centripète, ou centrifuge, EL , toujours dirigée vers un centre donné S , agissent tout-à-la-fois sur une ligne ou chaîne AEB d'une épaisseur uniforme, la première n'a point d'action sur V ; & si LZ est perpendiculaire au rayon de courbure en Z , & SM étant égale à SE , l'ordonnée MN est toujours égale à EL , comme dans l'article 567. le rectangle sous le rayon de courbure EO , & sous $EI = EZ$ sera toujours égal à l'aire $adNM$. Car, achevez le parallélogramme $ELKI$, soit KR perpendiculaire à OE en R , le rectangle REO sera égal à KEC , ou $\frac{1}{2}VV$, qui est $= adNM$. Et puisque $IR = EZ$, il suit que $adNM$ est égal au rectangle sous EO , & sous la somme ou la différence de EI & EZ . Il est évident que $EZ : EL$ force qui agit dans la droite ES , comme SP , perpendiculaire à la tangente en E , est à SE , & que EL agissant par des lignes parallèles, EZ est à EL , Fig. 253

comme la Fluxion de la base est à la Fluxion de la courbe, & dans ce dernier cas, ce Théorème s'accorde avec celui des Commentaires de Petersbourg, *Tome III*. La propriété du rayon de courbure étant ainsi connue, on peut déterminer, en quelques cas par les premières Fluxions, la nature de la courbe, ou par une équation ordinaire, en appliquant la Méthode inverse des Fluxions. Les Problèmes de l'article 563. considérés d'une manière générale, dépendent de la courbure des lignes, & par conséquent leur solution générale renferme le rayon de courbure, ou quelque chose d'équivalent. Mais il y a souvent d'autres principes particuliers qui servent à résoudre plus aisément les cas particuliers de ces Problèmes; nous en avons donné des exemples dans les articles 441 & 551. (où la solution s'accorde avec celle de l'article 558.) & nous aurons occasion d'en donner d'autres exemples dans le Chapitre suivant, relativement aux lignes de la plus vite descente.

C H A P I T R E X I I I .

Où l'on détermine la nature des lignes de la plus vite descente, dans chaque hypothèse de pesanteur, & où les Problèmes concernant les figures isopérimètres, avec d'autres de la même espèce, sont résolus par les premières Fluxions, & leurs solutions vérifiées par des démonstrations synthétiques.

571. **O**N a fait voir dans le Chapitre IX. comment on pouvoit aisément déterminer les plus grandes & moindres ordonnées des figures, par la Méthode des Fluxions, & l'on y a démontré les règles ordinaires avec les corrections nécessaires, pour les rendre exactes & générales. Mais il y a des Problèmes touchant les *maximum* & *minimum*, qui sont d'un genre plus élevé, & qui ne peuvent pas se réduire immédiatement à ces règles. On sçait depuis long-tems, que de toutes les aires égales le cercle a la moindre circonférence, & que de tous les solides égaux, la Sphere est terminée par la moindre surface.

Mais le premier Problème de cette espece, qui demande des recherches plus subtiles, a été résolu par Newton, *Schol. Prop. XXXIV. Lib. II. Princip.* où il donne la propriété de la figure, qui, roulant sur son axe, produit le solide de moindre résistance. M. Bernoulli trouva que la cycloïde étoit la ligne de la plus vîte descente dans l'hypothese ordinaire de la pesanteur, & il détermina la nature de cette ligne en plusieurs autres cas, & sous différentes restrictions. L'analyse du Problème général concernant les figures, qui, parmi toutes celles de la même circonférence, produisent les *maximum* & *minimum*, a été donnée par M. Jacques Bernoulli, par des calculs qui renferment les secondes & troisièmes Fluxions, en divisant l'élément de la courbe, en trois parties, infiniment petites. (*Analysis magni problematis isoperimetrici. Acta Erud. Lipsf. 1701. p. 213 & seqq.*) Et l'on a fait depuis plusieurs recherches, de cette nature, de la même maniere; mais non pas toujours avec le même succès. Pour suivre le dessein que nous avons eu dans ce Traité, de défendre cette théorie contre l'imputation d'incertitude & d'obscurité, nous tâcherons d'éclaircir cette matiere, qui est regardée communément comme une des plus abstraites, en proposant la solution, & la composition de ces Problèmes, & nous déterminerons les propriétés des lignes de la plus vîte descente, (soit que la pesanteur soit supposée agir par des paralleles, ou être dirigée à un centre donné, & soit que la circonférence de la figure soit supposée d'une quantité déterminée, ou soit qu'on ajoute d'autres limitations de cette espece,) & des figures isopérimetres qui produisent d'autres *maximum* & *minimum*, immédiatement par les premières Fluxions, sans diviser les élémens de la courbe en deux ou plusieurs parties, & d'une maniere qui fournira une démonstration synthétique, pour servir à vérifier la solution. Tout cela fera compris dans peu de Propositions générales; mais il sera bon, dans ce Chapitre, comme dans les précédens, de commencer par les cas les plus simples, & de continuer par ceux qui sont plus compliqués. Nous commencerons donc par supposer que la pesanteur agit par des lignes paralleles.

572. Il faut établir d'abord le Lemme suivant. Soit KL une droite donnée de position. AK perpendiculaire à KL d'un point donné A, E un point quelconque de cette ligne. Joignons AE. Supposons que KE doit être décrite uniformément avec une

Fig. 254.

vitesse donnée a , & AE avec une vitesse donnée u moindre que a : soit pris L sur KL, en sorte que $AL : KL :: a : u$; la différence des tems où les droites AE & KE seront décrites par les vitesses respectives u & a , (ou $\frac{AE}{u} - \frac{KE}{a}$)

fera moindre lorsque E tombe sur L ; c'est-à-dire, lorsque l'angle KAE est tel que son sinus est au rayon comme u est à a . Car, que KH & EV soient perpendiculaires à AL en H & V respectivement, & que l'on prenne AR sur AL égal à AE, HV sera à KE, comme KL est à AL, ou (par la construction) $:: u : a$. Donc HV sera décrite avec la vitesse u , dans le même tems que KE est parcourue avec la vitesse a . Donc l'excès du tems, où AE est décrite avec la vitesse u , par dessus le tems où KE, est décrite avec la vitesse a , est égal au tems où $AE - HV$, ou bien $AR - HV$, ou $AH + VR$ est décrite avec la vitesse u ; & parce AH est invariable, ce tems est moindre lorsque VR disparoît ; c'est-à-dire, lorsque E tombe sur L, & que le sinus de KAE est au rayon, comme u est à a . On démontre la même chose par l'art. 242. selon lequel $\frac{AE}{u} - \frac{KE}{a}$ est un moindre lorsque la Fluxion disparoît, c'est-à-dire, (parce que u & a sont constantes) lorsque $u : a ::$ la Fluxion de AE à la Fluxion de KE, ou par l'article 193. comme KE est à AE, c'est-à-dire, lorsque E tombe sur L.

Fig. 255.

573. Il suit, que si kl , KL sont deux paralleles, e un point sur kl , & E sur KL, si la droite eE est décrite avec la vitesse u , & eb étant perpendiculaire à KL en b , bE est décrite avec la vitesse a , la différence des tems où eE & bE sont ainsi décrites, fera moindre lorsque le sinus de l'angle Eeb est au rayon comme u est à a , & que lorsque cette différence doit être un moindre, l'angle Eeb ne dépend pas de la grandeur de Eb , mais uniquement de la raison de u à a .

Fig. 256.

574. La pesanteur étant supposée agir par des lignes paralleles, soit FED la ligne de la plus vite descente du point F à une verticale donnée HD. Soit AE un arc de cette ligne (le point E étant supposé plus bas que A) KE une parallele par E à l'horizontale FH, AK perpendiculaire à KE. L'excès du tems de la chute dans l'arc AE par dessus le tems où KE seroit décrite uniformément, par le mouvement acquis en D, est toujours un moindre, AK étant donnée. Soient Ae & Ae d'autres

d'autres lignes menées de A en quelques points dans KE, de l'un des deux côtés de E; que le tems de la chute par AE soit exprimé par T.AE, & que, de même, les tems de la chute par Ae & Ae, & les tems, où KE, Ke & Ke feroient décrits par le mouvement acquis en D, soient exprimés par T au-devant de chacune. Je dis que T.AE — T.KE fera moindre que T.Ae — T.Ke, ou T.Ae — T.Ke. Pour le démontrer, il faut remarquer qu'aucun point de la ligne FED, entre F & D, ne sçauroit être plus bas que D; car, soit FzD une ligne qui a un point z, entre F & D, plus bas que D, & que zr, parallèle à FH, rencontre HD en r, rz fera parcourue en moins de tems que zD, & Fzr en moins de tems que FzD; enforte que FzD ne peut pas être la ligne de la plus vite descente du point F à la verticale HD. Cela étant supposé, soit e un point entre K & E, & e un autre point de l'autre côté de E. Soient ed & ed des lignes égales & semblables à ED, & semblablement posées, enforte que eE soit égal à dD, & Ee à Dd. Par la supposition le tems de la chute le long de AED est moindre que le long de AedD, & en retranchant les tems égaux de la chute le long de ED & ed, il suit que T.AE < T.Ae + T.dD, ou T.Ae + T.eE, ou T.Ae + T.KE — T.Ke. Donc T.AE — T.KE < T.Ae — T.Ke. Que ed rencontre HD en quelque point x, puisque D est le plus bas point de FED, d doit être le plus bas point de ed, & x doit être au-dessus de D. Par la supposition, le tems de la chute le long de AED est moindre que le long de Aex, & le tems par Dd étant moindre que par xd, il suit, qud le tems de la chute, le long de AEDd, est moindre que le long de Aed, & retranchant les tems égaux le long de ED & ed, il suit, que T.AE + T.Dd < T.Ae. C'est-à-dire, T.AE + T.Ee, ou T.AE + T.Ke — T.KE < T.Ae. Donc T.AE — T.KE < T.Ae — T.Ke.

575. Cette propriété de la ligne, de la plus vite descente, donne immédiatement la nature de la figure. Que AT, tangente de cette ligne en A, rencontre Ke en T, que la vitesse acquise en A soit nommée u, & celle en D, a. Il est évident que AK, diminuant continuellement jusques à disparaître, la dernière raison du tems de la chute le long de AE, au tems où AT feroit décrite avec la vitesse u, est une raison d'égalité; & que la dernière raison de KE à KT, ou bien des

tems où KE & OT seroient parcourues avec la vitesse a , est encore une raison d'égalité. Donc, puisque l'excès du tems de la chute le long de AE , par-dessus le point où KE seroit parcourue avec la vitesse a , est toujours un moindre, il suit, que la différence dess tems où AT & KT seroient parcourues avec les vitesses respectives u & a , est un moindre, AK étant donnée. Donc, par l'article 572. le sinus de l'angle KAT est un rayon comme u est à a , & si Aa est une ordonnée abaissée de A sur FH , la Fluxion de la base FA sera toujours à la Fluxion de la courbe FA , comme la vitesse en A à la vitesse en D . Et telle est l'analyse du Problème, lorsque la pesanteur agit par des paralleles. Il est clair que la ligne de la plus vite descente de F à la verticale HD , est aussi la ligne de la plus vite descente de F en D , ou entre deux points de FED . Parce que u devient égal à a , lorsque E arrive en D , la courbe est donc perpendiculaire à HD en D .

Fig. 256.
N. 2.

576. Il est maintenant aisé de faire voir, par une démonstration synthétique, que la ligne, qui a cette propriété, est celle de la plus vite descente. Supposons que $FAED$ soit une ligne telle que le sinus de l'angle qu'elle forme au point E avec EQ verticale, est toujours comme la vitesse du corps qui descend en E sur cette ligne; soit AEB un arc de cette ligne, Aa & Bb des ordonnées perpendiculaires à l'horizontale FH , AP & Bp paralleles à FH , AT tangente en A , TEt tangente en E , tB tangente en B , & TR , tr paralleles à FH . Il est clair, par l'article 573. que si AT , Tt & tB sont parcourues uniformément avec les vitesses respectives, acquises aux points d'attouchement A , E & B , l'excès du tems sur $ATtB$ par-dessus le tems où ab seroit parcourue avec une vitesse donnée a , plus grande que celle qui est acquise en B , sera moindre, que si les points T , t & B étoient pris en quelque autre point, que ce soit des paralleles TR , tr & Bp . Que TR & tr rencontrent la courbe en g & h , & que Sgs , Vhv , tangentes en g & h , rencontrent AT , Tt , & tB en S , s , V & v respectivement; & que AS , Ss , sV , Vv , vB soient parcourues avec les vitesses respectives acquises aux points respectifs d'attouchement A , g , E , h , B , l'excès du tems, où la figure circonscrite $ASsVvB$ est ainsi parcourue par-dessus le tems où ab seroit parcourue avec la vitesse donnée a , sera moindre que si les points S , s , V , v & B étoient pris en quelques au-

tre endroit que ce soit des droites SX, Sx, VZ, vz parallèles à FH , par le même article. En augmentant de cette manière les côtés de la figure circonscrite, & supposant toujours chaque côté parcouru avec la vitesse acquise à son attouchement avec la courbe, le tems ou la figure circonscrite seroit ainsi parcourue, approchera continuellement du tems de la chute dans l'arc AEB , & la dernière raison de ces tems sera une raison d'égalité. Donc l'excès du tems de la chute, le long de AEB sur le tems où ab seroit parcourue avec la vitesse donnée a , sera un moindre, le point A , avec la distance entre les parallèles AP & Bp , étant donné, & les vitesses étant toujours les mêmes dans les mêmes lignes horizontales. Donc, puisque ab est donnée lorsque les points A & B sont donnés, & que la vitesse a est donnée, le tems où ab seroit parcouru, avec cette vitesse, est donné. Donc AEB sera parcouru en moins de tems qu'aucune autre ligne AEB qui passe par A & B . On voit aisément que FED , perpendiculaire à HD , est la ligne de la plus vite descente de F à HD .

577. Lorsque la pesanteur est uniforme, la vitesse en E est en raison sous-doublée de l'ordonnée QE ; en sorte que (par les démonstrations précédentes,) la Fluxion de la base FQ est à celle de FE ligne de la plus vite descente, en raison sous-doublée de QE à HD ; ce qui étant la propriété d'une cycloïde, dont la base est FH & l'axe HD , la cycloïde est la ligne de la plus vite descente dans l'hypothèse ordinaire de la pesanteur. Lorsque la pesanteur est comme la puissance de la distance de FH , dont l'exposant est un nombre n , & que le corps est supposé descendre de FH , ou descendre d'un point A avec la vitesse qui auroit été acquise par la chute aA , la vitesse en E est comme la puissance de QE , dont l'exposant est $\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}$, & la Fluxion de la base FQ est à la Fluxion de la ligne FE de la plus vite descente, comme cette puissance de QE est à la même de HD . Dans ces cas, si EI , toujours perpendiculaire à la courbe, rencontre FH en I , le mouvement du point I , dans la droite FH , sera uniforme, pendant que le corps descend le long de la courbe, & pourra servir à mesurer le tems de la chute. La vitesse de I , dans la droite FH , sera à la vitesse acquise en D , point le plus bas de la ligne de plus vite descente, comme la différence entre 1 & n est à 2 , & le tems où HI seroit parcourue uniformément avec le mouvement acquis en

D, sera au tems de la chute en ED dans la même raison. Que FQ soit supposée fluier uniformément, (par la propriété de la ligne de la plus vite descente) la Fluxion de FE sera réciproquement comme la vitesse en E, ou comme la puissance de EQ, dont l'exposant est $\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}$, & (par l'article 167.) la seconde Fluxion de FE sera à la Fluxion de EQ en raison composée de $n+1$ à 2, & de la Fluxion de FE à EQ. Par conséquent (article 381.) si CE est le rayon de courbure en E, & si Ck est perpendiculaire à EQ en k, Ek sera à EQ, comme 2 à $n+1$, & CI à CE, comme la différence de 1 & n à 2. Mais la Fluxion de HI est à celle de la courbe DE en raison composée de la raison de CI à CE, & de EI à EQ, ou de la vitesse en D à la vitesse en E. Donc lorsque FH est parcourue avec la vitesse acquise en D, la Fluxion du tems dans FI est à la Fluxion du tems dans la ligne de la plus vite descente, comme CI est à CE, ou comme la différence de 1 & n à 2; & le tems où la droite IH est parcourue, par un mouvement égal à celui qui est acquis en D, est au tems de la chute le long de l'arc ED dans la ligne de la plus vite descente en même raison. Ce Théorème ne s'étend pas au cas où $n=1$; ou AED est un arc de cercle, & le point I n'a point de mouvement. Tout ce qu'on a démontré dans l'art. 407. sur le mouvement d'un corps qui descend le long d'une cycloïde dans l'hypothèse commune de la pesanteur, est un cas particulier de ce Théorème.

578. Pour découvrir la nature de la ligne de la plus vite descente, lorsque la pesanteur est dirigée vers un centre donné, on se servira du Lemme suivant, comme on s'est servi de celui de l'article 572. dans le cas précédent. Soient AI & KL des cercles décrits du même centre S. Le point A étant donné sur AI, soit E un point sur KL, & que SE rencontre AI en M; joignez AE; supposons que AE soit parcourue avec une vitesse donnée, représentée par u , que l'arc AM soit décrit avec une vitesse donnée représentée par b ; la différence des tems où AE & AM, sont parcourus de cette manière, sera moindre (ou $\frac{AE}{u} - \frac{AM}{b}$ fera un moindre) lorsque le sinus de l'angle SAE est au rayon, comme u est à b , si la raison de u à b est moindre que celle de SK à SA. Soit SH à SA :: u : b , & que SE rencontre le cercle décrit du centre S en N; HN fera à AM :: SH : SA :: u : b . Enforte que HN fera dé-

crit avec la vitesse u , dans le même tems que AM avec b . Donc la différence des tems où AE est parcourue avec la vitesse u , & AM avec la vitesse b est égale au tems où $AE - HN$ est parcouru avec la vitesse u , & est moindre lorsque $AE - HN$ est moindre. Soit AP , tangente du cercle HNh , menée du point A , qui rencontre l'arc KEk en L , & que Sp soit perpendiculaire à AE en p , la Fluxion de AE sera à celle de KE , comme Sp à SE ou SK ; mais la Fluxion de KE est à la Fluxion de HN , comme SK est à SH . Donc la Fluxion de AE est à la Fluxion de HN , comme Sp est à SH , & la Fluxion de $AE - HN$ est à la Fluxion de HN , comme $Sp - SH$, ou $Sp - SP$ est à SP . Donc KE & HN étant supposés croître uniformément, $AE - HN$ décroît jusques à ce que E arrive en L , où la Fluxion dispaçoit, (parce que Sp devient $= SP$) & ensuite il croît jusques à ce que AE devienne tangente de KEk ; par conséquent $AE - HN$, ou $\frac{AE}{u} - \frac{AM}{b}$ est un moindre lorsque E tombe sur L , auquel cas le sinus de SAE est au rayon, comme SP ou SH est à SA , c'est-à-dire, comme u à b . Quoique cela suffise pour le dessein présent, il est bon de remarquer, que si AP prolongée rencontre le cercle KLk en l , $AE - HN$ est un *maximum*, lorsque E arrive en l , SH étant moindre que SK ; mais que SH étant égal à SK , $AE - HN$ (qui, dans ce cas, est $AE - KE$) ne devient jamais un *minimum*, ni un *maximum*, quoique sa Fluxion disparoisse lorsque AE devient tangente de KEk : & c'est-là un exemple de ce que l'on a fait voir dans l'article 261. touchant l'inexactitude de la regle commune, pour déterminer un *maximum* ou *minimum*, & la correction requise pour la rendre générale. Car l'arc HN étant supposé fluer uniformément, la Fluxion de $AE - HN$ est comme $Sp - SH$, & il est aisé de voir que la Fluxion de $Sp - SH$, ou la seconde Fluxion de $AE - HN$ disparoît, en ce cas, aussi-bien que sa premiere Fluxion, mais que sa troisième Fluxion ne disparoît pas.

579. De même, lorsque l'on prend kl , cercle décrit du centre S avec un rayon Sk , plus grand que SA , & Se coupant l'arc AI en m , $\frac{Ae}{u} - \frac{Am}{b}$ est un moindre, lorsque le sinus de l'angle SAe est un rayon, comme u est à b ; par conséquent $\frac{eE}{u} - \frac{Mm}{b}$ est aussi un moindre; dans ce cas,

N. 3.

e E étant une droite terminée par les cercles KL , $k l$.

580. La pésanteur étant dirigée vers le centre S , soit FED la ligne de la plus vite descente depuis F à une verticale SDH , AE un arc de FED , & que les rayons SA , SE rencontrent le cercle DLK décrit du centre S en K & L . EM différence de SA , & SE étant donnée, l'excès du tems de la chute par AE arc de la ligne de la plus vite descente, par-dessus le tems où l'arc circulaire KL feroit décrit avec la vitesse acquise en D sera un *minimum*. Soit ke un arc décrit du centre S , qui rencontre SA en k , que Ae & Ae soient des lignes menées de A à cet arc; que les tems de la chute par AE , Ae & Ae soient représentés par $T.AE$, $T.Ae$ & $T.Ae$, & menant Se , Se qui rencontrent DK en l & l , soient les tems où KL , Kl & Kl feroient parcourus par la vitesse acquise en D , représentés par $T.KL$, $T.Kl$ & $T.Kl$, je dis que $T.AE - T.KL < T.Ae - T.Kl$, ou $T.Ae - T.Kl$. Il est évident que D doit être le point le plus bas de FD ; car soit FzD une ligne qui a son point le plus bas en z , & que zr soit perpendiculaire à SD ; puisque zr feroit parcouru en moins de tems que zD , & Fzr en moins de tems que FzD , FzD ne peut pas être la ligne de la plus vite descente, depuis F à la verticale SD . Soient ed & ed égales & semblables à ED , & situées semblablement par rapport aux rayons Se , Se , comme ED l'est à SE , en sorte que ld & ld soient chacune égales à LD , & lL égale à Dd , lL à Dd . Soit e entre k & E , & e de l'autre côté de E ; le tems de la chute par AED étant moindre que par $AedD$, par la supposition, & les tems de la chute, par ed & ED étant égaux; il suit, que $T.AE$ est moindre que $T.Ae + T.Dd$, ou $T.Ae + T.KL - T.Kl$; donc $T.AE - T.KL < T.Ae - T.Kl$. Que ed rencontre SH en x , le tems de la chute, par AED , étant moindre que par AEx par la supposition, & le tems où Dd est parcouru par le mouvement acquis en D moindre que le tems de la chute par xd , il suit que le tems de la chute par $AEDd$ est moindre que par Aed , & en ôtant les tems égaux par ED & ed , il est clair que $T.AE + T.Dd$ (ou $T.Ll$, ou $T.Kl - T.KL$) $< T.Ae$. Donc $T.AE - T.KL < T.Ae - T.Kl$. Donc $T.AE - T.KL$ est un moindre, lorsque AE est un arc de la ligne de la plus vite descente, & que EM ou $SA - SE$ est donné.

581. On trouve aisément par cette propriété, & par l'article

578. la nature de la courbe de la plus vite descente, lorsque la pesanteur est dirigée à un centre donné. Car, puisque $T. A E - T. K L$ est un moindre, il suit, que si $S E$ rencontre le cercle $A M P$ décrit du centre S en M , & si nous supposons l'arc $A M$ décrit avec une vitesse b , qui est à la vitesse a acquise en D , comme $S A$ est à $S D$ ou $S K$, le tems où $A M$ est ainsi parcouru, sera égal au tems où $K L$ est parcouru avec la vitesse a ; & si le tems, où $A M$ est ainsi parcouru, s'exprime par $T. A M$, alors $T. A E - T. A M$ sera, de même, un moindre, $E M$ différence de $S A$ & $S E$ étant donné. Donc, (article 578.) c'est la nature de la ligne de la plus vite descente en ce cas, que si $A T$ est tangente en A , le sinus de l'angle $S A T$ fera au rayon, comme la vitesse en $A M$ est à la vitesse b , qui est elle-même supposée être à la vitesse acquise en D , comme $S A$ est à $S D$. C'est-à-dire, que le sinus de l'angle $S A T$, où un rayon $S A$ coupe la courbe en A dans la ligne de la plus vite descente, est toujours au rayon, en raison composée de la raison directe, de la vitesse acquise en A à la vitesse en D , & de la raison inverse de la distance $S A$ à la distance $S D$. Et telle est l'analyse du Problème lorsque la pesanteur est dirigée vers un centre donné.

582. Soit maintenant $F E D$ une ligne de telle nature que le sinus de l'angle sous la courbe $F E$, & sous le rayon $S E$, soit au sinus total en raison composée de la vitesse en E à la vitesse en D , & de $S D$ à $S E$. Soit $A E B$ un arc de cette ligne; soient $A T, T t$ & $t B$ des tangentes en A, E & B ; soient $A M, R T, r t$ & $p B$ des cercles décrits du centre S par A, T, t & B , & que $S A, S T, S t$ & $S B$ rencontrent le cercle $D a$ décrit du centre S en a, m, n & b . Que les tangentes $A T, T t$ & $t B$ soient parcourues avec les vitesses acquises aux points respectifs d'atouchement A, E & B ; l'excès du tems où $A T t B$ sera ainsi décrit, par-dessus le tems où l'arc circulaire $a b$ seroit décrit avec la vitesse acquise en D , sera moindre que si les points T & t étoient pris en quelque autre endroit des arcs $R T, r t$. Car, que les vitesses acquises en A & D soient nommées u & a , & que $b : a :: S A : S S$, puisque le sinus de $S A T$ est au sinus total, comme u est à b ; il suit, que si $A M$ est parcourue avec la vitesse b , $T. A T - T. A M$ sera un moindre, $T M$ étant donné, par l'article 578. mais $A M$ & $a m$ sont parcourus par ces vitesses b & a en tems égaux. Donc $T. A T - T. a m$ est aussi un moindre. De même, $T. E t - T. m n$, & $T. t B - T. n b$ sont des moindres, par l'ar-

Fig. 258.

13

ticle 579. les différences des rayons ST & St ; & de St & SB étant données. Ainsi, en procédant, comme dans l'article 576. on démontrera synthétiquement que l'excès du tems de la descente par l'arc AEB , sur le tems où ab est parcouru avec le mouvement acquis en D est un moindre, $SA - SB$ étant donné. Donc AED est parcourue en moins de tems que toute autre ligne qui passe par A & D , les vitesses étant supposées égales en A , & par conséquent à toutes les autres distances égales de S .

Fig. 259.

583. Tout ce que nous avons fait voir, touchant les lignes de la plus vite descente, s'accorde avec le second principe général, décrit ci-devant, dans l'article 563. & peut s'en déduire. Car, soit PN ordonnée de la figure HNG qui représente toujours la vitesse en P . SE étant toujours égal à SP ; que SX soit perpendiculaire à la tangente en E , SX fera à PN , comme SD est à SD , par le dernier article. Donc, puisque la Fluxion de SX est à la Fluxion de PN , comme SX à PT . Si Ed est la moitié de la corde du cercle de courbure, laquelle passe par S , Ed fera $= PT$, par l'article 384. comme elle doit l'être, selon le second principe général de l'article 563. Par cette propriété de ces lignes, on peut démontrer synthétiquement que AEB n'est pas seulement la ligne de plus vite descente de A en B , mais de quelque point que ce soit dans Aa , rayon de courbure en A , à un point de Bb , rayon de courbure en B , pourvu que la courbe HNG soit concave vers HD . Il est bon de développer cette Méthode, quoiqu'elle ne soit pas applicable au cas où HNG est convexe vers HD ; non-seulement pour mieux éclaircir ce sujet, mais parce qu'on peut l'appliquer à des cas différens de ceux que nous avons considéré jusqu'ici.

Fig. 260.

584. Soit AEB une ligne décrite, par le développement de aCb , comme dans l'article 402. Soit M un point dans le rayon CE , si la vitesse qui seroit acquise en M est à la vitesse en E , toujours en moindre raison que CM à CE , AEB n'est pas seulement la ligne de la plus vite descente de A en B , mais d'un point en Aa à un point en Bb . Car, soit la vitesse en M à la vitesse en E , comme une ligne CZ moindre que CM est à CE , KML une ligne terminée par Aa , & Bb en K & L , & fMh une ligne décrite par M , par le développement de la même courbe aCb , enforte qu'elle soit toujours perpendiculaire au rayon CE , pendant que aCb est développée. La Fluxion du tems en AE fera à

à la Fluxion du tems en fM , en raison composée de la Fluxion de AE à la Fluxion de fM , (ou de CE à CM) & de la raison de la vitesse en M à la vitesse en E , ou de CZ à CE , c'est-à-dire, en raison de CZ à CM . Donc la Fluxion du tems en AE est toujours moindre qu'en fM , qui est elle-même plus grande que la Fluxion du tems en KM ; parce que CE est supposée toujours perpendiculaire à fM , & que la Fluxion de fM ne peut jamais surpasser celle de KM . Donc la Fluxion du tems en AE est toujours moindre qu'en KM , en sorte que le tems en AE doit être moindre qu'en KM , & le tems en AEB moindre qu'en KML .

585. Supposant la pesanteur dirigée au centre S , & toujours de la même force à la même distance du centre, soit pris SP , sur un rayon donné SH , toujours égal à SE ; la vitesse en chaque distance SE ou SP , étant telle qu'elle seroit acquise par une chute de la distance SH ; soit PN , ordonnée de la figure HNG pour représenter cette vitesse, & NT , tangente de HNG en N , rencontrant SH en T . Soit pris Ed sur SE prolongée depuis E toujours égal à la soûtangente PT , & que dC , perpendiculaire à Sd , rencontre EC une perpendiculaire à la courbe AEB en C . Si le point C , déterminé de cette manière, est toujours le centre de courbure de AEB en E , & que HNG soit concave vers HD , AEB fera la ligne de la plus vite descente, depuis un point dans la droite Aa , à un point en Bb . Car, soit M un point sur CE différent de E , lMp un arc d'un cercle du centre S qui rencontre SH en p , & SE en l ; que pn , ordonnée en p , rencontre HNG en n , & NT en z , & que lx , perpendiculaire à Sl , rencontre CE en x . La vitesse en M sera à la vitesse en E , comme pn à PN , & par conséquent en moindre raison que pz à PN , ou TP à TP , ou dl à dE , ou Cx à CE , & par conséquent (Cx étant moindre que CM) en moindre raison que CM à CE . D'où il suit, (par le dernier article) que AEB est parcouru en moindre tems que toute autre ligne, menée d'un point Aa à un point sur Bb , les vitesses étant supposées égales à égales distances de S , ou étant telles qu'elles seroient acquises par une chute de la même distance au centre S . La même démonstration a lieu lorsque HNG est une droite, parce qu'en ce cas, Cx est toujours moindre que CM . Elle n'a pas lieu lorsque HNG est convexe vers HD ; en ce cas, AEB n'est pas la ligne de plus vite descente, depuis Aa à Bb . Mais il est clair, par l'article 582. qu'elle est ligne de plus vite descente de

A en B. On voit que la même démonstration a lieu, lorsque la pèsanteur agit par des lignes parallèles, & que HNG est concave vers HD, en substituant une horizontale à la place de l'arc pMl ; mais elle n'a pas lieu, lorsque HNG est une droite, auquel cas l'arc de cercle est la ligne de plus vite descente de A en B, mais un arc semblable concentrique est parcouru en même-tems que AEB, comme on peut aisément le démontrer.

586. Les figures construites dans les articles 392 & 393. qui sont des *trajectoires* & *chaînettes*, (par les articles 436, 437, 438 & 569.) dans quelques-uns des cas les plus simples, lorsque la force centripete ou centrifuge, est réciproquement comme une puissance de la distance ou centre d'un exposant plus grand ou moindre que l'unité, sont, de même, des lignes de plus vite descente en certains cas analogues. Lorsqu'une force centripete est réciproquement comme une puissance de la distance n plus grande que l'unité, & que la vitesse, en un point F, est à la vitesse, dans un cercle à la distance SF, en raison sous-doublée de 2 à $n-1$, la ligne de la plus vite descente, depuis F à la verticale SDH, est la même qui a été construite dans l'article 392. par la droite AM, en prenant toujours l'angle ASL à ASM, comme 2 à $n+1$, & SL à SA, comme la puissance de SA de l'exposant $\frac{2}{n+1}$ à la même puissance de SM. Car, dans ces figures, le sinus de l'angle SAT est réciproquement comme la puissance de SA de l'exposant $\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}$, & par conséquent en raison composée de la raison directe de la vitesse, (qui est réciproquement comme la puissance de SA de l'exposant $\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}$) & de la raison inverse de la distance; donc ces lignes sont, en ce cas, de la plus vite descente, par l'article 582. Par exemple, lorsque la force est réciproquement comme le cube de la distance, (ou que $n=3$) & qu'un corps descend d'un point F avec une vitesse égale à celle dans un cercle à la distance SF, la ligne de la plus vite descente AEB, est un arc d'une hyperbole équilaterale, qui a son centre en S. Lorsque $n=2$, & que la vitesse en F est à celle dans un cercle à la distance SF, comme $\sqrt{2}$ à 1, la figure se construit en prenant $ASL = \frac{2}{3}ASM$, & $SL =$ à la première des deux moyennes proportionnelles entre SM & SA. Lorsqu'une force centrifuge, agissant sur un corps, est réciproquement comme une puissance de SA, d'un exposant n , moindre que 1, & que la vitesse en chaque point F, est à la vi-

Fig. 171.

resse dans un cercle décrit à la distance SF , par une force centripète égale à la force centrifuge en F , en raison sous-doublée de 2 à $1 - n$, AEB est, de même, une des figures construites, dans l'article 392. en prenant ASL à ASM , comme 2 à $1 - n$, & SL à SA , comme la puissance de SM de l'exposant $\frac{2}{1-n}$

à la même puissance de SA . Par exemple, lorsque la force centrifuge est constante, & que la vitesse en F est à la vitesse dans le cercle à la distance de SF , comme $\sqrt{2}$ à 1, la ligne de la plus vite descente, est un arc d'une parabole qui a son foyer en S . Lorsque la force centrifuge est comme la distance de S , & la vitesse en F , égale à celle dans le cercle, la ligne de la plus vite descente est un arc de cercle, ou d'une logarithmique spirale. Lorsque la force centrifuge est comme une puissance de la distance d'un exposant n plus grand que 1, & que la vitesse en F est à celle, dans un cercle décrit à la distance SF , égale à la force centrifuge en F , comme 2 à $n + 1$, la ligne de la plus vite descente, est une de celles construites dans l'article 393. par le cercle, en prenant ASL à ASM , comme 2 à $n - 1$, & SL à SA , comme la puissance de l'exposant $\frac{2}{n-1}$ à la même puissance de SA . Et en ce cas, selon que n est $= 2, 3$, ou 5 , AEB est un arc d'une épicycloïde, décrite par un point dans la circonférence d'un cercle qui roule sur un cercle égal, ou c'est un arc d'un demi-cercle, ou d'une *lemniscata*. Il est clair que ces figures satisfont également au Problème, lorsque le corps, qui y est poussé par une force répandue depuis S qui est comme une puissance de la distance, se meut d'un point donné A à un point donné E avec une vitesse donnée, & qu'il est requis que la somme des actions, soit un moindre. Par exemple, si la puissance est réciproquement, comme le quarré de la distance, AE est un arc d'un demi-cercle qui passe par les trois points S, A & E ; si elle est réciproquement comme la puissance de la distance de l'exposant m plus grand que 1, AMS étant un demi-cercle, soit l'angle ASL à ASM , comme 1 à $m - 1$, & SL à SA , comme la puissance de SM de l'exposant $\frac{1}{m-1}$ à la même puissance de SA .

Fig. 171

587. Pour conclure ce sujet, par un exemple qui peut faire sentir l'étendue du second Théorème général de l'article 563. & pour servir à trouver la courbure des lignes de la plus vite descente, lorsque la pesanteur tend vers plusieurs centres, soient

Fig. 172

Fig. 217.

des forces égales qui tendent vers C & S, comme dans l'article 491. que la vitesse soit telle qu'elle auroit été acquise par la chute de F, E un point dans la ligne de la plus vite descente; sur CE prenez Eu égal à l'excès de CF+SF par dessus CE+SE, & uz, perpendiculaire à Cu, coupera la droite Ez, qui divise également l'angle CES en z, enforte que Ez fera un quart de cette corde du cercle de même courbure, que la ligne de la plus vite descente en E, qui divise également l'angle CES.

Fig. 256.

588. Supposons maintenant qu'il soit requis de trouver la nature de la ligne, qui, de toutes celles qui passent par deux points A & B, & ont des circonférences égales, est décrite dans le moins de tems. Soit le tems, où AEB est parcouru par un corps qui descend le long de cette courbe par sa pesanteur, $\equiv T.AEB$ & le tems, où la même ligne seroit décrite uniformément par une vitesse donnée, $a, \equiv t.AEB$, & que la raison de m à n soit une raison donnée; si $\frac{m}{n}. T.AEB \neq t.AEB$ est un moindre, AEB fera parcourue en moins de tems qu'aucune autre ligne A e B d'une circonférence égale. Car, que T. A e B représente le tems de la chute le long de A e B, $t.A e B$ le tems où A e B seroit parcourue avec la même vitesse donnée a ; par la supposition $\frac{m}{n}. T.AEB \neq t.AEB$ est moindre que $\frac{m}{n}. T.A e B \neq t.A e B$, puisque ce sont les tems où des lignes égales sont parcourus par des mouvemens uniformes égaux. Donc, T.AEB est moindre que T. A e B, c'est-à-dire, que AEB est parcouru en moins de tems que toute autre ligne, d'une circonférence égale, qui passe par A & B. Il est clair que $\frac{m}{n}. T.AEB + t.AEB$ ne peut pas être un moindre, lorsque AEB est plus grand que la ligne qui est parcourue en moins de tems, que toute autre ligne qui passe par A & B; & que $\frac{m}{n}. T.AEB - t.AEB$ ne peut pas être moindre, lorsque AEB est moindre que cette ligne.

589. Que la vitesse, en chaque point E, soit représentée par u , & que $b : a :: m : n$; que $V : u :: a : b \neq u$; si AEB est la ligne parcourue, en moins de tems que toute autre ligne quelconque, qui passe par A & B, par une vitesse, qui, en chaque point E, est représentée par V, la même ligne AEB fera parcourue en moins de tems que toute autre, d'une égale circon-

férence qui passe par A & B, par une vitesse qui, en chaque point E, est représentée par u : car, la Fluxion de T. A E B est exprimée par la raison de la Fluxion de A E à u ; celle de t . A E B par la raison de la Fluxion de A E à a ; par conséquent la Fluxion de $\frac{m}{n}$. T. A E B $\mp$ t . A E B, par la raison de la Fluxion de A E à V, & $\frac{m}{n}$. T. A E B $\mp$ t . A E B est égal au tems où A E B est parcouru avec une vitesse qui est toujours $= V$ en chaque point E. Donc, lorsque ce tems est un moindre, $\frac{m}{n}$. T. A E B $\mp$ t . A E B est aussi un moindre, & A E B est parcouru en moins de tems que toute autre ligne de la même circonférence, qui passe par A & B.

590. Supposons que la pesanteur agit par des paralleles, qui est le cas examiné par M. Bernoulli ; si le sinus de l'angle FEQ est au rayon, (ou la Fluxion de la base FQ à celle de la courbe FE) comme V à une vitesse constante, qui est en raison composée de la raison de u , vitesse en E à la somme, ou à la différence de b & u , & d'une raison invariable, A E B sera parcourue en moins de tems que toute autre ligne égale, qui passe par A & B, par l'article 576. ce qui s'accorde avec l'équation de la courbe qui a été trouvée par ce sçavant Auteur, en réduisant l'élément de la courbe à trois parties rectilignes infiniment petites, & calculant les secondes Fluxions. *Mem. de l'Acad. Royale des Sciences.* 1718. *Prop. IV. & Schol.* 1.

591. La même Méthode découvre, avec la même facilité, la propriété de ces lignes, lorsque la pesanteur est dirigée vers un centre donné S. Que la vitesse du corps qui descend le long de la courbe A E B, en quelque point E, soit représentée par u , Fig. 257. & que b exprime une vitesse invariable ; si le sinus de l'angle SEB, formé en E par la courbe A E & par le rayon SE, est toujours au sinus total, en raison composée de celle de u à la somme, ou à la différence de b & u , & de la raison d'une ligne invariable à la distance S E, la ligne A E B sera parcourue en moins de tems que toute autre ligne égale que l'on puisse mener de A en B, les vitesses étant supposées égales, dans chacune, en A. En général, soit E C la moitié de la corde du cercle de courbure en E, c'est-à-dire, dans la direction de la force E K, qui agit sur le corps en ce point, comme dans l'article 563. & supposons que le corps descende de E en C E, avec la vitesse

u acquise sur la courbe en E , le point C étant supposé rester, si la courbure de la ligne est telle, que la Fluxion de u soit à celle de EC , en raison composée de u à EC , & de $b \mp u$ à b , AEB fera parcouru en moins de tems que toute autre ligne égale, qui passe par A & B , les vitesses étant égales en A . La démonstration est semblable à celle de l'article 565.

592. Les célèbres Problèmes des isopérimètres peuvent être traités de la même manière, & être rendus plus généraux qu'ils ne sont ordinairement, sans avoir recours aux Fluxions des ordres plus élevés; & les solutions de ces Problèmes (que l'on regarde généralement comme fort abstraites) peuvent se vérifier par les démonstrations synthétiques aisées. Le Lemme nécessaire, à ce dessein, ne diffère pas essentiellement de celui de l'article 572. que nous avons démontré, sans avoir recours aux Fluxions. Soit KL une droite donnée de position, A un point donné qui n'est pas dans KL , AK perpendiculaire à KL en K , E un point sur KL , & que a & u représentent des lignes données ou constantes : si KL est à AL , ou le sinus de l'angle KAL au rayon, comme u est à a , $AE \times a - KE \times u$ sera un moindre, lorsque E tombe sur L . Car, que KH & EV soient perpendiculaires à AL en H & V , & $AR = AE$; puisque $KE : HV :: AL : KL$, ou $:: a : u$, $KE \cdot u = HV \cdot a$, $AE \cdot a - KE \cdot u = (AE - HV) \cdot a$, ou $(AH + VR) \cdot a$, qui est évidemment moindre, lorsque VK disparaît, ou que E tombe sur L . De-là, il suit que le point A , la distance AK , & la distance Ek des parallèles KL , kl étant données, Ek étant perpendiculaire à kl en k , & E , e étant des points sur ces parallèles, si a , u & v sont supposées invariables $AE \cdot a - KE \cdot u - ke \cdot v$ sera moindre, lorsque le sinus de KAE est au rayon, comme u est à a , & qu'en même tems le sinus de kEe est au rayon, comme v est à a ; car, en ce cas, $AE \cdot a - KE \cdot u$ sera un moindre, & $Ee \cdot a - ke \cdot v$ sera moindre que si l'angle kEe étoit d'une autre grandeur, enforte que leur somme sera moindre que si les droites AE & Ee étoient tournées d'une autre manière.

593. On démontre aisément, par le dernier article, que kC & CG étant perpendiculaires l'une à l'autre en C , une figure donnée $KMNLG$ étant appliquée sur CG , E un point de la courbe AED , EPN , une parallèle à kC , qui rencontre CG en P , & la courbe ML en LN , $Ep n$, parallèle à CG , qui rencontre kC en p , sur laquelle on prend toujours $p n = PN$ ordonnée

Fig. 261.

Fig. 262.

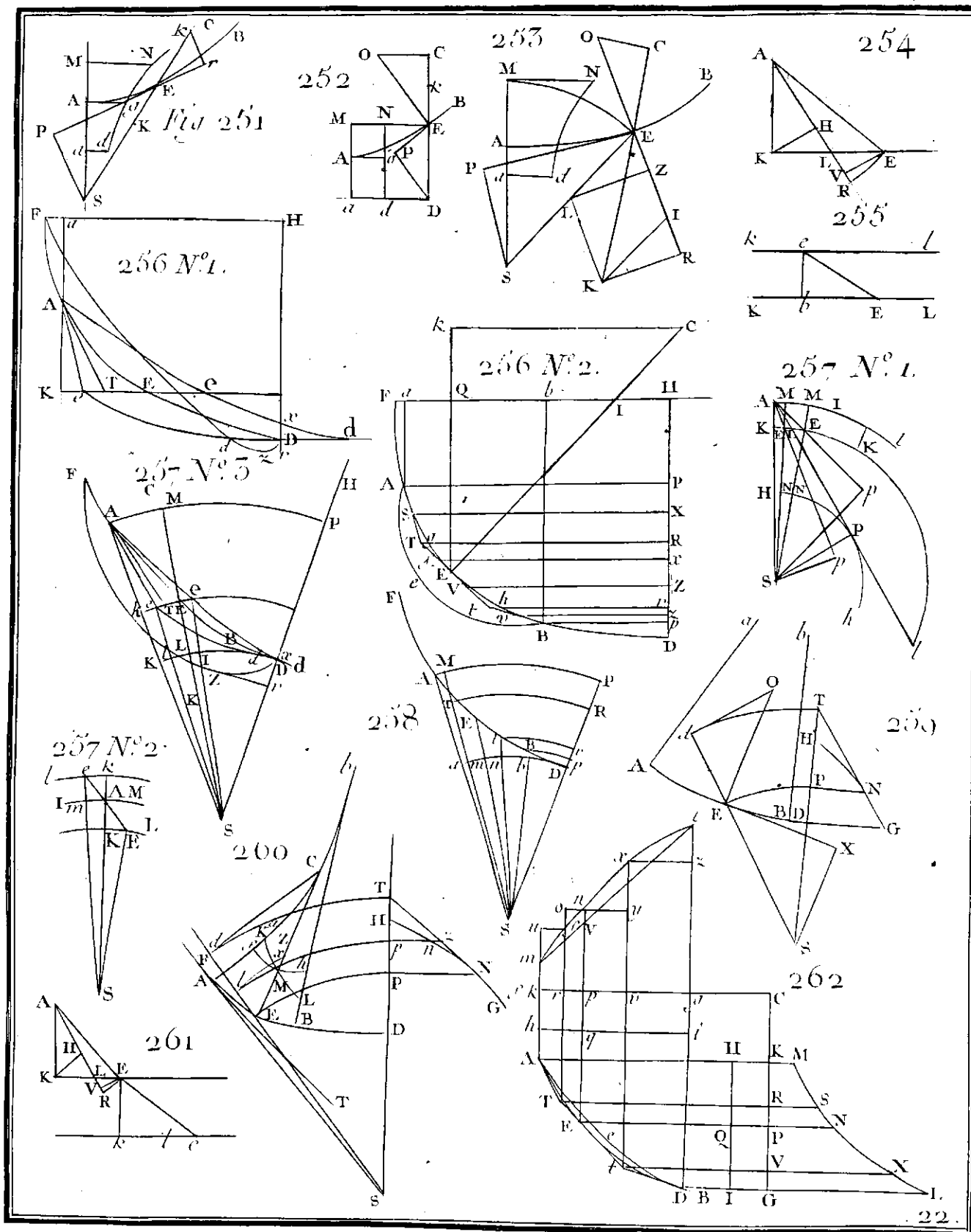
de la figure $K M N L G$, ce qui produit l'aire $k m n l g$; si le point A , la distance $K G$, (ou la différence de $A k$ & $D g$ ordonnées de la courbe $A E D$ sur $f C$) & la figure $K M N L G$ avec la droite a étant données, l'excès de $A E D \times a$ sur $k m n l g$, aire engendrée par $p n$, sera un moindre, lorsque le sinus de l'angle $A E p$, formé par la courbe $A E$ & une ordonnée $E p$, est au rayon, comme $P N$, ordonnée correspondante de la figure $K M N L G$, est à la constante a . Car, que $T E t$, tangente en E , rencontre $A T$ tangente en A au point T , & $D t$ tangente en D au point t , que $T R S$ & $t V X$, parallèles à $k C$, rencontrent $C G$ en R & V , & $M L$ en S & X , que $T r s$ & $t u x$, parallèles à $C G$, rencontrent $k C$ en r & v , & $m n l$ en s & x ; achevons les parallelogrammes $k r s u$, $r p n o$, $p n y v$, $v x z g$; l'excès de $A T E t D. a$ sur la figure $k u s o y x z g$, somme de ces parallelogrammes sera moindre que si les points T, E, t, D étoient pris, en quelque autre endroit, sur les parallèles $T R, E P, t V, D G$, par le dernier article. Donc, en menant des tangentes à la courbe $A E B$ aux points où $T R$ & $t V$ la coupent, & des parallèles à $k C$, par les points où ces tangentes coupent $A T, T t$ & $t D$, & continuant de cette manière, la dernière raison de la figure circonscrite $A T t D$ à la courbe $A E D$, & de l'aire $k u s o y x z g$ à l'aire curviligne $k m n l g$ sera une raison d'égalité. Donc, $A E D. a - k m n l g$ sera un moindre; le point A , avec les droites a & $K G$, & la figure $K M L G$ étant donnés.

594. Il suit, que le point A étant donné avec la figure $K M L G$, si $p n$ est toujours $= P N$, & si le sinus de l'angle $A E p$ est toujours au rayon comme $P N$ à a , l'aire $k m n l g$ sera plus grande qu'aucune aire $k m v l g$ formée de la même manière, par une ligne $A E D$ qui est menée de A à $L G D$ d'une circonférence égale à $A E D$. Car, puisque $A E D. a - k m n l g$ est moindre que $A e D. a - k m v l g$, par le dernier article, & que $A e D$ est $= A E D$ par la supposition, il est évident que $k m n l g$ doit être plus grand que $k m v l g$. Donc, lorsque le sinus de l'angle $A E p$ est toujours au rayon, comme $P N$ est à a , $A E D$ est la ligne qui, parmi toutes celles qui sont menées de A à $L G D$ ayant les circonférences égales, produit la plus grande aire $k m n l g$.

595. Le reste subsistant comme ci-devant, que $H I$, parallèle à $K G$ à une distance donnée $K H$, rencontre $E P$ en Q ,

& hi , parallèle à kg à une distance égale kh , rencontre Ep en q , & que les points h, k, m soient dans le même ordre l'un à l'autre, que H, K, M . qn sera toujours $= QN$, & l'aire $hilm$, produite par l'ordonnée qn , sera un plus grand, ou un moindre, selon que HI & KG sont du même côté, ou de différens côtés de MNL , les points A & D étant donnés. Car, puisque $kmnl$ est toujours un plus grand, & que le rectangle hg est donné, $hmnli$ sera un plus grand, lorsque hi & kg , sont du même côté de mn , c'est-à-dire, lorsque HI & KG sont du même côté de MNL ; & $hmnli$ sera un moindre, lorsque hi & kg sont de différens côtés de mn , ou que HI & KG sont de différens côtés de MNL . On voit donc que l'aire $hmnli$ produite par l'ordonnée $qn = QN$, est un plus grand, lorsque le sinus de l'angle AEq est toujours au rayon, (ou la Fluxion de la base hq à la Fluxion de la courbe AE) comme $QN + HK$ est à a , ou comme $QN - HK$ est à a , si QN , dans ce dernier cas, n'est jamais moindre que HK ; parce que lorsque HI & KG sont du même côté de MNL , PN (ou pn) est, ou égal à $QN + HK$, ou à $QN - HK$, QN n'étant, en ce cas, jamais moindre que QP ou HK ; mais que l'aire $hmnli$ est un moindre, lorsque le sinus de l'angle AEq est toujours au rayon (ou la Fluxion de la base hq à celle de la courbe AE) comme $HK - QN$ est à a , HK étant supposé n'être jamais moindre que QN ordonnée de MNL à l'axe HI ; parce que lorsque KG & HI sont de différens côtés de MNL , $HK - QN$ est $= PN$. Les points A & D , avec la figure $HMLI$, sont supposés donnés, & la circonférence AED toujours la même. Cette propriété de la ligne AED , qui, parmi toutes celles d'égales circonférences, qui passent par A & D produit la plus grande, ou la moindre aire $hmnli$, en prenant l'ordonnée qn toujours $= QN$ ordonnée correspondante de la figure $KMNLG$, est la même que M^{rs} Bernoulli, le Docteur Taylor & d'autres, ont déduit par des calculs qui renferment les troisièmes Fluxions. Il est clair que la courbe AED est concave, ou convexe vers AK , selon que le sinus de l'angle AEq croît ou décroît, pendant que KP croît. Lorsque HI coupe MNL en quelque point entre M & L , hi coupe aussi mn en quelque point entre m & l , & une partie de la figure AED produit un plus grand, & l'autre un moindre. Lorsque MNL rencontre KG , l'angle AEq dis-

paroît,



paroît, & la courbe touche l'ordonnée $E q$; & si $P N$ devient $= a$, $A E q$ devient un angle droit, & la courbe perpendiculaire à l'ordonnée.

596. Parce que le sinus de l'angle formé par la courbe, & l'ordonnée $E q$ est au rayon, comme $P N$ est à a , il suit, de l'article 576. que $A E D$ est, de même, la ligne de la plus vite descente, lorsque la vitesse, en chaque partie de la droite EPN , est toujours mesurée par l'ordonnée correspondante $P N$, comme l'a observé M. Jacques Bernoulli, & cette analogie, entre les lignes qui satisfont à ces deux Problèmes, vient de la ressemblance des Méthodes, par lesquelles on a démontré leurs propriétés, dans les articles 576 & 595.

597. Supposons maintenant que S est un point donné, qu'un Fig. cercle $g p k$ est décrit du centre S avec un rayon donné $S g$, que $S A$, $S E$ & $S D$ rencontrent ce cercle en k , p & g , que la figure $H M L D$ étant donnée, & $S Q$ étant toujours égal à $S E$, $S n$ est pris sur $S E$ toujours $= Q N$ ordonnée correspondante de $H M L D$; il est question de trouver la nature de la ligne $A E D$, qui, parmi toutes celles qui passent par les points A & D , étant des circonférences égales, produisent de cette manière la plus grande, ou la moindre aire $S m n l$. Il est évident que a étant une ligne invariable, si $A E D. a - k m l g$ est un moindre, alors $k m l g$ fera plus grand qu'aucune aire formée de la même manière, par une figure qui a sa circonférence égale à $A E D$, & que $S m n l$ fera plus grande, ou la moindre des aires terminées par $S m$ & $S l$, selon que le point S , & l'arc circulaire $k p g$ sont du même, ou de différens côtés de $m n l$. Pour trouver quand $A E D. a - k m l g$ est un moindre, que $A T$, tangente en A , rencontre le cercle $Q E$ décrit du centre S en T , & que $S T$ prolongée rencontre l'arc $A R H$ décrit du même centre en R ; on voit, par l'article 578. que $A T. a - A R. u$ est un moindre, ($H Q$ étant donné) lorsque le sinus de l'angle $S A T$ (ou chaque rayon $S A$ coupe la courbe $A E D$) est au sinus total, comme u est à a . Supposons donc que $A R. u$ soit à la fin égal à l'aire $k m n p$; puisque $k m n p$ est à la fin au secteur $S A R$, (ou $\frac{1}{2} S A. A R$) comme la différence où la somme (selon que k & m sont du même, ou de différens côtés de S) des carrés de $S m$ & $S k$ au carré de $S A$; il suit, que u est à $\frac{1}{2} S A$, comme la différence où la somme des carrés est à $S A^2$; en sorte que u est à a , & par conséquent le sinus de l'angle $S A E$

est toujours au sinus total, comme cette différence, ou somme, est à $2.SA.a$. Donc, dans la figure AED , si SX est perpendiculaire à la tangente EX en X , & si Sg & QN sont représentées par c & V respectivement, le rectangle $2a.SX$ sera égal à la différence, ou à la somme de VV & cc . Les constantes a & c (avec une autre constante qui vient en déterminant la figure par cette propriété,) servent à remplir les conditions du Problème, lequel exige que la courbe passe par A & D , la circonférence étant supposée de même grandeur dans toutes ces figures, par lesquelles AED produit la plus grande, ou la moindre aire Slm .

598. Lorsque Sg est supposée disparaître, $2a.SX$ est $= QN^2$, ou SX est au troisième proportionnelle à $2a$ & QN , & l'aire $Smnl$ est un plus grand. En ce cas, si $HMNLD$ est une parabole qui a son sommet en S , & son axe en SH , ou une hyperbole d'un ordre, tel que l'ordonnée QN soit réciproquement comme une puissance de SQ , AED est une des figures construites dans les articles 392 ou 393. que nous avons déjà trouvé satisfaire aux plus simples cas de plusieurs Problèmes, dans les articles 436, 437, 438, 439, 567 & 586. Par exemple, lorsqu'on prend Sn sur SE toujours égal à une moyenne proportionnelle entre SE & une ligne donnée, & que AED est un arc d'une logarithmique spirale, qui a son pôle en S , l'aire $Smnl$ est la plus grande qui puisse être produite, de la même manière, par un arc d'une circonférence égale, qui passe par A & D . Lorsque MNL est une droite qui passe par S , AED est un arc de cercle, & mnl est de même, un arc de cercle semblablement situé par rapport à S , soit que Sg soit supposée disparaître, ou non; & en ce cas, on sait fort bien que l'aire $Smnl$ est un plus grand, ou un moindre, selon que mnl est concave, ou convexe vers S .

599. On voit, de même, que si une ligne donnée hqi rencontre SA , SE & SD en h , q & i ; & qu'on prenne toujours qn sur Sq égal à QN , la propriété de la figure AED sera que parmi toutes celles d'une égale circonférence qui passent par A & D , celle-là produira la plus grande, ou la moindre aire hml , lorsque le sinus de l'angle SEX sera au sinus total, comme la différence, ou la somme des carrés de $Sq \mp QN$ & Sg est à $2SE \times a$.

600. La propriété de la ligne AED , décrite par une vitesse

qui a la distance SE ou SQ est toujours mesurée par QN , ordonnée de la figure donnée $HMLD$, & celle de toutes les lignes qui passent par A & D , sont parcourues dans le même tems, & renferment la plus grande, ou la moindre aire $SAED$, est que le sinus de l'angle SEX est au sinus total en raison composée de QN à une vitesse constante, & de la différence, ou de la somme des quarrés de SE , & d'un quarré constant au rectangle sous SE , & sous une ligne constante. Car, la construction étant la même que dans l'article 597. si $aa.T.AED - AEDgpk$ est un moindre, le point A & la droite HD étant donnés, l'aire $AEDgpk$ sera plus grande qu'aucune aire $AeDgpk$ terminée par une ligne AeD , qui est décrite en même tems que AED ; & $SAED$ sera plus grand, ou moindre que $SAeD$, selon que le point S & l'arc kpg sont du même, ou de différens côtés de AED . Parce que $\frac{AT}{u} - \frac{AB}{b}$ est un moindre (HQ étant donné) lorsque le sinus de SAT est au sinus total, comme u est à b , par l'article 578. Soit $QN = u$, & supposons $\frac{AEdpk}{aa}$ finalement égal à $\frac{AR}{b}$. Puisque $AEdpk$ est finalement au secteur SAR , ou $\frac{1}{2}SA.AR$, comme la différence, ou la somme de SA^2 , & Sk^2 à SA^2 , il suit, que b fera à $2SA$, comme aa est à cette différence, ou somme; & que u est à b , ou le sinus de l'angle dans lequel le rayon SA coupe la courbe, au sinus total en raison composée de la même différence, ou somme à aa & de QN à $2SA$. Lorsque la pesanteur agit par des lignes paralleles, on découvre, de la même maniere, la nature de AED .

601. Le Lemme suivant nous conduit à une solution aisée du second Problème général des isopérimètres. Le point A étant donné, les droites AE , b & u étant données de grandeur, & AG de position, soit EK perpendiculaire à AG en K : $EK.b + AK.u$ fera un *maximum* lorsque la tangente de l'angle AEK est au sinus total, comme u est à b . Car, soit le cercle BEb , décrit du centre A avec le rayon donné AE , qui rencontre AG en G ; soit Gg perpendiculaire à AG , en sorte que Gg & KE soient de différens côtés de AG ; & soit $Gg : AG :: u : b$. Joignez Ag qui sera donnée de position. Que EK prolongée rencontre Ag en O ; puisque $KO : AK :: Gg : AG$, ou $:: u : b$. $AK.u$ sera $= KO.b$; en sorte que $EK.b + AK.u = EO.b$.

Fig. 264.

M ij

& sera un *maximum*, lorsque EO est le plus grand. Mais il est clair que EO est le plus grand, lorsque ET, tangente du cercle en E, est parallèle à Ag, ou lorsque AE est perpendiculaire à Ag, c'est-à-dire, lorsque AK : KE, ou la tangente de l'angle AEK au sinus total :: Gg : Ag, ou :: u : b. On voit, de même, que si les droites Ee & v sont aussi données de longueur, & que ek soit perpendiculaire à AG en k, $ek.b + AK.u + Kk.v$ sera un *maximum*, lorsque la tangente de l'angle AEK est au sinus total, comme u est à b, & qu'en même tems la tangente de Eek est au sinus total, comme v est à b; parce que EK.b + AK.u est alors un *maximum*; & que Em, parallèle à AG, étant supposée rencontrer ek en m, $em.b + Em.v$ sera plus grand que si l'angle Eek étoit d'une autre grandeur. En général, que la ligne AEefd soit composée d'un nombre de parties AE, Ee, ef, fD dont chacune est donnée de longueur, que EK, ek, fl, DL soient perpendiculaires à AL; prenez sur ces perpendiculaires Ku, kv, lx, Lz égales à des lignes données; le sinus total étant supposé = b, que la figure de la ligne AEefd soit telle que les tangentes des angles AEK, Eex, efl, fDL soient respectivement égales aux perpendiculaires Ku, kv, lx, Lz; achevez les parallelogrammes AKur, Kkvs, klxt, lLzy; la somme du rectangle LD.b ajouté à l'aire ArusvtxyzL (qui est composée de ces parallelogrammes) sera plus grande, que si la ligne AEefd formoit une autre figure.

Fig. 265.

602. Soient AEDL & ABMIL appliquées au même axe AL, que EPM, parallèle à DL, rencontre BMI en M, & que la tangente de l'angle AEP, où la courbe AED coupe son ordonnée EP, soit toujours au sinus total, comme PM est à b. Soit Aed une autre ligne égale en longueur à AED, & l'arc Ae étant toujours = AE, soit epm, parallèle à DL, qui rencontre AL en p, & que pm, toujours = PM, produise l'aire ABmil. Il suit, de ce qu'on a démontré dans le dernier article, que $DL.b + ABMIL$ sera toujours plus grand que $dl.b + AMmil$. D'où il suit que lorsque $dl = DL$, l'aire $ABMIL > ABmil$. Et si l'on suppose que d se confonde avec D, (& par conséquent IL avec il) AH étant donnée sur AB, si HG, parallèle à AL, rencontre ID en G, PM en Q, & pm en q, l'aire HBmig, produite par les ordonnées QM, sera plus grande, ou plus petite que HBmig produite par l'or-

N. 2.

donnée qm , selon que HG & AL sont du même, ou de différens côtés de MNI . Donc, puisque QM est égal à la somme, ou à la différence de PM & AH , la propriété de la ligne AED , qui, parmi toutes celles qui passent par A & D , ont les circonférences égales, & produit la plus grande, ou la moindre aire $HBMIG$, lorsque l'ordonnée QM dépend de la longueur de l'arc AE , étant, ce qu'on appelle, une *fonction* de cet arc, (c'est-à-dire, QM étant toujours égal à l'ordonnée d'une figure donnée, dont la base est égale à AE ,) est que la tangente de l'angle AEP est au sinus total, ou la Fluxion de la base AP à la Fluxion de l'ordonnée PE , comme la somme, ou la différence de QM & d'une ligne invariable AH , est à une constante b . Et cela s'accorde avec ce que les Auteurs, ci-devant cités, ont trouvé par leurs calculs.

603. On voit, comme dans l'article 597. que S étant un point donné, si sur SE on prend une droite SM toujours égale à une fonction de l'arc AE , (c'est-à-dire, à l'ordonnée d'une figure donnée, dont la base est égale à l'arc AE ,) l'aire $SBML$ est la plus grande, ou la plus petite de toutes celles qui peuvent être ainsi produites, par des lignes de circonférences égales, qui passent par A & D , si la tangente de l'angle SED , où le rayon coupe la courbe, est toujours au sinus total, comme la différence, ou la somme du carré de SM , & d'un carré constant, est à $2SE.b$. Fig. 266.

604. On peut réduire à ceux-ci les autres Problèmes isopérimétriques, ou les traiter de la même manière. Par exemple, que ER , parallèle à AK , rencontre AS parallèle à KD en R , & que RN , SV ordonnées de la figure $ANVS$ soient toujours égales aux fonctions des arcs AE & AED ; que NZ & VX soient perpendiculaires à KA prolongée en Z & X . Puisque l'aire AVX est égale à $AS.SV - ANVS$, & que A & D étant donnés, l'arc AED est donné de longueur, sa fonction SV étant donnée, le rectangle ASV est donné, il suit, que l'aire AVX est un *maximum*, lorsque AVS est un *minimum*, & que AVX est un *minimum* lorsque AVS est un *maximum*, c'est-à-dire, (par l'article 602.) lorsque la tangente de AER est au sinus total, comme la somme, ou la différence de RN & d'une constante, est à une constante. L'aire AVX à son ordonnée $ZN = EP$ ordonnée de AED , & sa base $AZ = RN$ fonction de AE ; & la ligne AED est celle qu'on prend pour une chaîne.

parfaitement flexible & suspendue par A & D, lorsque l'épaisseur de la chaîne, en chaque point E, est comme la Fluxion de RN; parce que le centre de gravité, d'une telle chaîne, descendra aussi-bas qu'il sera possible.

Fig. 254.

605. Le reste subsistant, comme dans l'article 572. supposons maintenant que u vitesse avec laquelle AE est parcourue, n'est pas donnée, mais qu'elle varie comme une puissance de AE, dont l'exposant est un nombre n . Lorsque le sinus de l'angle KAE est au sinus total, comme u est à $(1 - n) a \frac{AE}{u} - \frac{KE}{a}$, ou $\frac{AE}{u} + \frac{KE}{a}$ est un moindre, selon que n est moindre, ou plus grand que 1. Car, $\frac{AE}{u}$ sera comme AE^{1-n} , & la Fluxion de $\frac{AE}{u}$ à celle de AE, (article 167.) comme $(1 - n) \frac{AE}{u}$ à AE, ou :: $1 - n : u$ la Fluxion de AE est à celle de KE, comme KE est à AE, par l'article 193. Donc, la Fluxion de $\frac{AE}{u}$ est à celle de $\frac{KE}{a}$, comme $(1 - n) KE$ est à $AE \cdot \frac{u}{a}$. Donc, si n est < 1 , ces Fluxions sont égales, & $\frac{AE}{u} - \frac{KE}{a}$ est un moindre où sa Fluxion disparoît, lorsque $KE : AE : u : (1 - n) a$. Et lorsque $n > 1$, $\frac{AE}{u}$ décroît, pendant que $\frac{KE}{a}$ croît, & $\frac{AE}{u} + \frac{KE}{a}$ est un moindre où sa Fluxion disparoît, lorsque $KE : AE$, ou le sinus de KAE : sinus total, :: $u : (n - 1) a$, ainsi, dans ces cas, le sinus de l'angle KAE est toujours comme u , & ce Théorème, ainsi étendu, peut servir à résoudre les Problèmes concernant les plus grands & les moindres, lorsque le Lemme de l'article 572. ne suffit pas.

Fig. 266.
N. 2.

606. Il reste à faire voir comment on peut résoudre, par les premières Fluxions, le Problème touchant le solide de la moindre résistance. Le point A étant donné, que l'ordonnée AD rencontre KL (parallèle à l'axe DG) en K; que E soit un point sur KL: joignez AE; la résistance du solide étant représentée par une droite donnée AR, la résistance de la droite AK, qui se meut dans la direction KE, sera représentée par AK.AR. Soit RM perpendiculaire à AE en M, & MN perpendiculaire à AR en N, la résistance de la surface conique, produite par

AE (lorsque la figure est supposée rouler autour de l'axe DG,) fera à la résistance de l'espace annulaire produit par AK, comme RN est à AR, & par conséquent AK étant divisé également en a , cette résistance sera comme $Da.AK.RN$. Puisque AK étant donnée, RN décroît, pendant que KE croît, il faut voir quand est-ce que $Da.AK.+KE.AR.a$ est un moindre. La Fluxion de cette somme disparoît, AR (qui mesure la résistance directe du fluide,) AK, Da & a étant supposées constantes, lorsque la Fluxion de KE est à la Fluxion de RN, comme AK. Da est à $AR.a$. Mais RN étant à AR, comme AK^2 est à AE^2 , RN est réciproquement comme AE^2 , & (par l'article 167.) la Fluxion de RN est à celle de AE, comme $2RN$ à AE. Donc, la Fluxion de KE est à celle de AE, ou (article 193.) AE est à KE, comme $2Da.AK.RN$ est à $a.AE.AR$, c'est-à-dire, comme $2Da.AK^3$ est à $a.AE^3$. Donc $Da.AK.RN.+KE.AR.a$ est un moindre, lorsque $2Da.AK^3.KE = a.AE^4$.

607. De-là, il suit que KE, parallèle à l'axe BH, étant sup- N. 3.
posée rencontrer l'ordonnée AD en K, & AE, tangente en A, au point E, & a étant constante, si la ligne FAL est telle que $AD^2.AK^3.KE$ soit toujours $= \frac{1}{2}a.AE^4$, le solide produit par FALb roulant autour de l'axe BH trouvera moins de résistance, lorsqu'il se meut dans un fluide donné, selon la direction de l'axe BH, que le fluide produit, de la même manière, par toute autre figure, dont la circonférence passe par F & L. Car, lorsque AK est continuellement diminuée, Da est à la fin égale à DA, & il suit, du dernier article, que la somme du solide qui mesure la résistance de la surface conique produite par AE autour de l'axe BH, ajouté à $KE.AR.a$ devient enfin un moindre; & puisque la somme des résistances de ces surfaces coniques, est finalement égale à la résistance du solide, produit par FAL autour du même axe BH, & que la somme des solides $KE.AR.a$ est à la fin un solide donné $bL.AR.a$, (parce que bL, AR & a sont supposées être données) il est clair que la résistance du solide produit par FAL est un moindre. Il est aisé de voir que cela s'accorde avec la propriété de ce solide, donnée par Newton.

608. De même, lorsqu'une figure plane FAL roule autour d'un centre donné S, qui est dans le plan de la figure, dans un milieu qui résiste en raison doublée de la vitesse, la propriété de Fig. 257
N. 2.

la ligne, qui, dans ce cas, trouve le moins de résistance, est que le sinus de SAP sous le rayon, & la tangente est réciproquement comme le cube de la tangente AP , SP étant perpendiculaire à AP . Il y a plusieurs recherches de cette nature, que l'on peut résoudre de la même manière; mais nous allons donner ce qui est plus d'usage en Philosophie.

CHAPITRE XIV.

De l'Ellipse considérée comme section d'un cylindre de la pesanteur vers les corps, laquelle résulte de la pesanteur vers leurs particules. De la Figure de la Terre, & de la variation de pesanteur vers elle. Du Flux & Reflux de la Mer, & autres recherches de cette nature.

609. **L**ES propriétés du cercle démontrées par Euclide, Pappus, Grégoire de Saint-Vincent, & autres, fournissent les propriétés analogues de l'ellipse; qui, généralement parlant, se concluent plus aisément & plus brièvement, en la considérant comme section oblique d'un cylindre, ou comme la projection d'un cercle par des rayons parallèles sur un plan qui est oblique au plan du cercle. Car, le centre du cercle, par cette projection, donne le centre de l'ellipse, les diamètres du cercle, perpendiculaires l'un à l'autre avec les tangentes à leurs extrémités, (qui forment le quarré circonscrit) & leurs ordonnées respectives, donnent les diamètres conjugués de l'ellipse avec le parallélogramme circonscrit, & les ordonnées à ces diamètres; les lignes parallèles, dans le plan du cercle, ont leurs projections parallèles dans le plan de l'ellipse, qui sont l'une à l'autre, en même raison que celles dont elles sont en projection; toute aire, dans le plan du cercle, donne, par sa projection, une aire dans le plan de l'ellipse, qui est toujours à l'aire dans le plan du cercle, comme le grand axe de l'ellipse au petit, le cylindre étant supposé droit, & tous les cercles concentriques donnent des ellipses semblables concentriques. Ayant trouvé cette Méthode très-convenable, à ce sujet, pour découvrir les propriétés

tés de l'ellipse, & surtout quelques-unes qui serviront aux recherches suivantes; il est bon de la pousser un peu plus loin que ne l'a fait l'illustre Marquis L'hôpital, *Liv. VI. des Sect. coniques*, d'autant plus qu'il n'est pas difficile de dériver les propriétés analogues de l'hyperbole & de la parabole, lorsque l'on connoît bien celles de l'ellipse.

610. Que $aABb$ soit la section d'un cylindre droit par son axe cC , $adbe$ une section de ce cylindre perpendiculaire à cC , $ADBE$ une section perpendiculaire au plan $aAbB$, mais oblique à l'axe cC , la première, fera un cercle, dont e est le centre; & la seconde, une ellipse, dont C est le centre, AB le grand axe, ED perpendiculaire à AB , le second axe sera $=ab$ diamètre du cercle. Car, soit h un point quelconque de la circonférence du cercle, hp perpendiculaire à ab en p , hH & pP , parallèles cC , rencontrent le plan $ADBE$ en H & P , en sorte que H sera ce que nous appellons la projection de h , & P celle de p ; joignez HP , & elle fera perpendiculaire au plan $aAbB$; par conséquent $hpPH$ fera un parallélogramme, & $HP=hp$. Donc, le carré de HP est $=apb$, qui est à APB , (parce que $ap:AP$ & $pb:PB::ab:AB$) comme ab^2 est à AB^2 ; donc AHB est une ellipse, & son second axe $DE=ab$. On voit, de même, qu'une autre droite, dans le plan du cercle, laquelle est perpendiculaire à ab , a pour projection une droite égale dans le plan de l'ellipse, & perpendiculaire à AB .

611. Toutes les parallèles gh & kl , dans le plan du cercle, ont des parallèles GH & KL dans le plan de l'ellipse, qui sont en même raison l'une à l'autre que gh & kl . Car, les plans $gGHh$, $kKLl$ étant parallèles, les sections de ces plans, avec $ADBE$, seront parallèles, & puisque les angles des figures $gGHh$, $kKLl$ sont respectivement égaux l'un à l'autre, $GH:gh::KL:kl$.

612. Il est clair, que selon que f est un point en-dehors, ou en-dedans du cercle, sa projection est en-dehors, ou en-dedans de l'ellipse. Donc, la tangente du cercle, en chaque point h , a pour projection la tangente de l'ellipse en H . Donc, toute droite VR , parallèle à la tangente en H , est divisée également en M , par le diamètre qui passe par H & VM , MR sont les ordonnées de ce diamètre, étant les projections de vm & mr perpendiculaire à ch , & égales entre-elles. Que vt , tangente du cercle en v , rencontre ch prolongée en t , & que VT , tan-

gente de l'ellipse en V , rencontre CH en T . Puisque mM , hH & tT sont parallèles, & $cm:cv::cv$ (ou ch): ct . Il suit, que CM , CH & CT sont en proportion continue. Que tv prolongée rencontre le demi-diamètre cl perpendiculaire à ch en z ; puisque le rectangle $tvz = cv^2$, ou ca^2 , il suit, que si TV rencontre CL demi-diamètre conjugué à CH en Z , le rectangle $TVZ = CK^2$ demi-diamètre de l'ellipse, parallèle à TZ . Et si HNQ , parallèle à CK , rencontre CV & CL en N & Q , le rectangle HNQ sera aussi égal à CK^2 .

613. Toute droite gh , dans le plan du cercle, est à sa projection GH dans le plan de l'ellipse, comme le second axe de l'ellipse est au diamètre qui est parallèle à GH ; parce que ce diamètre est la projection du diamètre du cercle qui est parallèle à gh , & que les lignes parallèles, dans le plan du cercle, sont en même raison que leurs projections dans le plan de l'ellipse, par le dernier article.

Fig. 270.

614. Ainsi les droites pm & pn dans le plan du cercle, qui forment des angles égaux avec ab , ou avec phg parallèle à ab , du même, ou de différens côtés de cette parallèle, ont pour projections des droites PM , PN qui forment des angles égaux avec AB axe de l'ellipse, ou avec PHG projection de phg , & $PM:PN::pm:pn$. Car, que mr , perpendiculaire à pg en r , rencontre pn en f , mr sera égal à fr , & par conséquent leurs projections MR & FR seront égales, par l'article 610. & l'angle $MPR = NPR$; & puisque le diamètre parallèle à PM , est égal au diamètre parallèle à PN , il suit, que PM est à PN , comme pm est à pn , par le dernier article. Si nq est perpendiculaire à pg , & NQ à PG , on aura $PQ:PR::pq:pr$, & $PQ+PR:pq+pr::PQ:pq$, ou :: $AB:DE$. On verra ci-après, l'usage de cette propriété; mais il faut auparavant faire voir comme on peut déduire brièvement, de cette manière, les autres propriétés de l'ellipse.

Fig. 271.

615. Si une ligne VR , terminée par l'ellipse en V & R , rencontre des parallèles GH & KL en M & N , & que VR , GH & KL soient les projections de vr , gh & kl dans le plan du cercle, GM sera à KN , comme gm à kn , (par l'article 611.) & MH à NL , comme mh à nl ; par conséquent le rectangle $GMH:KNL::gmh:knl$. De même, le rectangle $VMR:VNR::vmr:vn r$. Mais $gmh = vmr$, (*Elem.* 35. 3.) & $kn l = vn r$. Donc $GMH:KNL::VMR:VNR$.

616. Lorsque hc & cl sont des demi-diamètres, perpendiculaires du cercle, soient hp & lq perpendiculaires à ab en p & q , & que HP & LQ soient les projections de ces ordonnées dans le plan de l'ellipse. HP sera $=hp$, (article 610.) ou cq , $LQ = lq$, ou cp . Puisque $CP^2 : cp^2$ & $CQ^2 : cq^2 :: CA^2 : ca^2$, il suit que $CP^2 + CQ^2 + cp^2 + cq^2$: ou $CH^2 + CL^2 : cp^2 + cq^2$, ou $ca^2 :: CA^2 + ca^2 : ca^2$; par conséquent $CH^2 + CL^2 = CA^2 + ca^2$, ou $CA^2 + CD^2$; c'est-à-dire, la somme des quarrés de deux diamètres conjugués est égale à la somme des quarrés des axes AB & DE . Fig. 272.

617. Tout rectangle $ghlk$ dans le plan du cercle qui est compris par deux droites, l'une gk parallèle, & l'autre gh perpendiculaire à ab , est à sa projection $GHLK$ dans le plan de l'ellipse, (qui est, de même, un rectangle) comme le second axe DE au premier AB . Car gh & GH , côtés de ces rectangles, perpendiculaires à AB , sont égaux, par l'article 610. & $gk : GK :: ab$, ou $DE : AB$. Tout triangle mnr , dans le plan du cercle, est à sa projection MNR dans le plan de l'ellipse en même raison. Car, si nq , parallèle à ab , rencontre mr en q , & NQ , parallèle à AB , rencontre MR en Q ; rh & mg , parallèles à ab , rencontrent nh & qk , perpendiculaires à ab en h , l , g & k , & si $GHLK$ est la projection de $ghlk$, les triangles MNR & mnr seront les moitiés des rectangles $GHLK$ & $ghlk$. Donc $mnr : MNR :: DE : AB$. On voit, par-là, que toute figure décrite dans le plan du cercle est à sa projection, dans le plan de l'ellipse, comme DE est à AB , & que les figures égales, décrites dans le premier, ont des projections égales dans le second. Ainsi les quarrés, décrits autour du cercle, étant toujours égaux, les parallelogrammes, décrits autour des diamètres conjugués de l'ellipse, (qui sont les projections de ces quarrés) sont toujours égaux. Si l'on prend CP & CS sur un diamètre FI , depuis C , en une raison donnée à CF , l'aire du parallelogramme, compris par les tangentes menées de P & S à l'ellipse, sera donnée; & ainsi l'on démontre aisément la propriété de l'ellipse, décrite dans l'Introduction, p. viij. Fig. 273.

618. Si le point r décrit de la circonférence du cercle $adbe$ d'un mouvement uniforme, & que R soit toujours la projection de r , le rayon CR décrira des aires égales autour de C en tems égaux, & ru , RV étant des arcs décrits dans le même tems, ur soutendante de l'angle d'attouchement dans le cercle, pa- Fig. 274.

rallele à cr étant à VT' soutendante de l'angle d'attouchement dans l'ellipse, parallele à CR , comme ca est à CR , il suit, que la force dirigée vers le centre C , par laquelle l'ellipse peut se décrire, est à la force par laquelle le cercle arb , sur le diamètre ab peut se détruire uniformément dans le même-tems, comme CR est à CD . La vitesse dans l'ellipse en R , est à celle dans le cercle, comme CZ , demi-diamètre conjugué de CR , est à CD , par l'article 610. & lorsque la force, vers le centre, est comme la distance, les tems périodiques, dans les cercles, étant égaux, les tems où l'ellipse est décrite seront de même égaux. Ainsi l'on démontre brièvement la Proposition X. du Liv. I. des Principes, avec ses Corollaires. De même s étant un point dans le plan du cercle, que r se meuve dans la circonférence, en sorte que rs puisse décrire des aires égales, en tems égaux, autour de S ; si S & R sont leurs projections dans le plan de l'ellipse, RS décrira des aires égales, en tems égaux, autour de S , par l'article 617. & la force en R vers S sera à la force en r vers s , comme SR à sr , ou (cg & CG , paralleles aux tangentes respectives en r & R , étant supposées rencontrer sr & SR en g & G , rs & rc étant prolongées jusques à la rencontre du cercle en x & o ,) comme GR à gr . Mais sp étant perpendiculaire à la tangente en r , la force en r vers s est réciproquement comme $sp^2.rx$; & par conséquent la force en R vers S est directement comme GR , & réciproquement comme $sp^2.grx$, ou (parce que le rectangle $grx = 2cr^2$, & par conséquent constant) comme $\frac{GR}{sp^2}$, ou (parce que $sp:rc::sr:gr$, ou :: $SR:GR$) comme $\frac{GR^3}{SR^2}$, & lorsque S est le foyer de l'ellipse, GR étant toujours égal à CA , la force en R vers S est réciproquement comme le quarré de SR distance au foyer, comme on l'a fait voir dans l'article 446.

Fig. 275.

619. Soient Aa & Bb deux diamètres de l'ellipse perpendiculaires l'un à l'autre. CL , perpendiculaire depuis C sur la corde AB , est toujours de la même longueur. Car $ABab$ est un rhombe, Kl & GH qui divise également AB & Ba en P & V sont des diamètres conjugués, $CG^2 - CV^2 : BV^2$, ou $CV^2 :: CG^2 : CK^2$, & $CG^2 : CP^2 :: CG^2 + CK^2 : CK^2$. Mais KQ étant perpendiculaire à GH en Q , $CP^2 : CK^2 :: CL^2 : KQ^2$. Donc $CG^2 : CG^2 + CK^2 :: CL^2 : KQ^2$. Donc $CG^2 + CK^2$ étant

invariables, & $CG.QK$ étant, de même, invariable, par les articles 616 & 617. il suit, que CL est invariable, & toujours égale à la perpendiculaire de C sur la corde qui joint les extrémités des deux axes. Ainsi l'aire d'un rhombe $ABab$, inscrit dans l'ellipse, est comme AB côté de la figure, & elle est moindre lorsque la figure est rectangle, ou lorsque Kl & GH sont les axes de l'ellipse, & elle est plus grande lorsque AB joint les extrémités des deux axes.

620. Sur AB , diamètre d'une ellipse, prenez les points G & F , en sorte que le carré de GF soit égal au rectangle AFB ; de G menez une droite GE , qui rencontre l'ellipse en H & K , & la ligne FE (parallèle à la tangente en B ,) en E : HE , GE & KE seront en proportion continue. Soient a, b, g, f, e, h & k les points du plan du cercle qui répondent à leurs projections A, B, G, F, E, H, K sur l'ellipse. fe sera perpendiculaire à cf , & le rectangle afb , ou $cf^2 - cb^2 = gf^2$. Donc $ge^2 = ef^2 + cf^2 - cb^2$, ou $ce^2 - cb^2$, c'est-à-dire, au carré de la tangente et , ou au rectangle hek . Donc he , ge & ke sont en proportion continue, & de même HE , GE & KE . On voit de la même manière, que lorsque G est un autre point sur le diamètre AB , la différence du rectangle HEK , & du carré de EG , est au carré du demi-diamètre parallèle à EG , comme la différence de AFB & GF^2 est à CB^2 .

621. Soit un quadrilatère $ae fb$ inscrit dans le cercle, & gm une parallèle à ef , l'un de ses côtés, laquelle rencontre les autres, ab , ae , bf en g , k , l respectivement, & le cercle en h & m ; gh , gk , gl & gm seront proportionnelles; car l'angle gak , étant $= efb$, ou glb , les triangles gak , glb sont semblables, & le rectangle $kgl = agb$, ou hgm . D'où il suit, que si $AEFB$ est un quadrilatère inscrit dans l'ellipse, & si une droite GM , parallèle à l'un des côtés EF , rencontre les autres côtés AB , AE , BF , en G , K , L , & l'ellipse en H & M , GH , GK , GL & GM seront proportionnelles. On peut, de la même manière, démontrer brièvement plusieurs autres propriétés de l'ellipse, comme les Lemmes $XXIV.$ & $XXV.$ du Livre I. des Principes. Mais nous ajouterons ici seulement un exemple ou deux, des propriétés des sections coniques qui se démontrent brièvement, en faisant voir d'abord qu'elles ont lieu dans le cercle, & ensuite les transportant à une section conique en général, en la considérant comme la projection d'un cercle sur

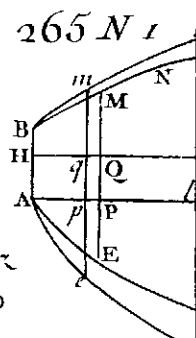
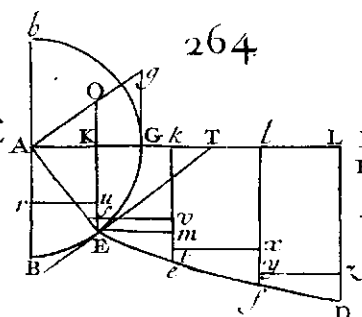
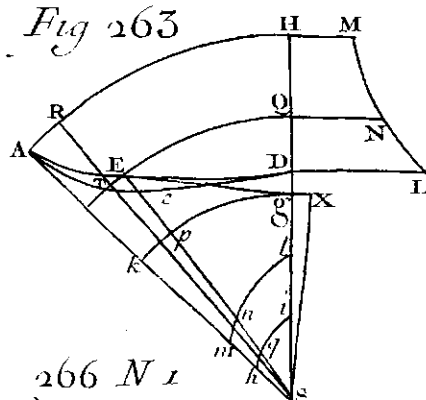
Fig. 278.

622. Soit g un point donné dans le plan du cercle; ef une droite par g , qui rencontre le cercle en e & f ; et & ft tangentes en e & f ; leur intersection t fera toujours dans une droite donnée de position. Car, joignez cg , & que td soit perpendiculaire à cg en d ; joignez ct qui coupera ef également en m . Le rectangle $met = ce^2$, & les triangles cqm , ctd étant semblables, le rectangle $gcd = met$, & par conséquent $= ce^2$. Donc cd est donnée, & dt est donnée de position. Mais il est clair, que si la projection de cette figure se fait sur un plan oblique par des rayons menés d'un point donné V , la projection du cercle sera une section conique, les droites et & ft auront leurs projections par les tangentes de la section conique, g par un point donné, & td par une droite dans le plan de la section conique qui sera donnée de position. Donc, lorsque G est un point donné dans le plan d'une section conique, & que EF passe toujours par G , l'intersection de ET & FT , tangentes en E & F , sera toujours dans la droite TD donnée de position.

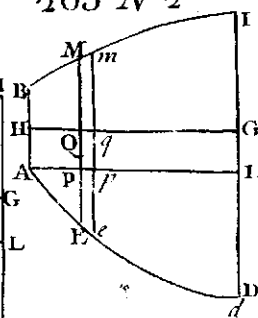
Fig. 279.

623. Que les cinq points C, S, E, A & B soient dans la circonférence d'un cercle; prolongez BC & ES jusqu'à leur rencontre en D ; que CP & SP soient menées de C & S à un point P dans le cercle; que CP rencontre EA en N , & SP , BA en Q ; D, Q & N seront toujours dans une droite. Car, que Nn , parallèle à SE , rencontre SQ en n , AP en m , & AB en r ; que An rencontre le cercle en b , & SE en G , & que BA rencontre SE en K . Puisque l'angle $ANn = AEK$, ou APS , un cercle passera par A, N, n & P , & l'angle NAn (ou EAb) sera $= NPn$, ou CPS . Par conséquent l'arc $Eb = CS$, & Cb parallèle à SE . Que BA, BS & AE rencontrent Cb en f, e & l , fb sera à fl , comme fe est à fC , par l'article 621. Mais $KG : KE :: fb : fl$, & parce que BeS est une droite, $KS : KD :: fe : fC$. Donc $KG : KE :: KS : KD$; & KG étant à $KE :: rn : rN$, $KS : KD :: rn : rN$; & parce que S, Q & n sont dans une droite, il suit, que D, Q & N sont aussi dans une droite. De-là il suit, en supposant la projection de cette figure, comme dans le dernier article, que si C, S, E, B & A sont cinq points dans une section conique, & que si deux des droites BC & ES se coupent en D , si CP & SP sont menées à un point P dans la section, que CP rencontre EA en N , & SP rencontre AB en Q ; D, Q & N seront toujours dans une droite. Par où

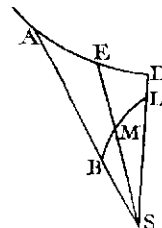
Fig 263



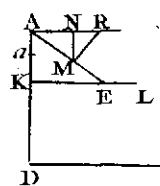
265 N 2



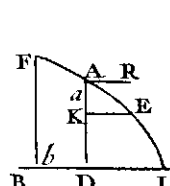
266 N 1



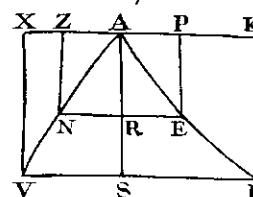
266 N 2



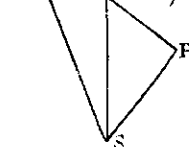
266 N 3



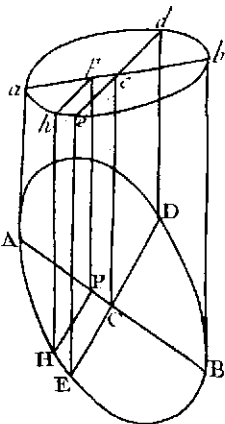
267 N 1



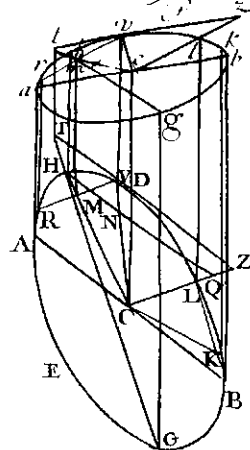
267 N 2



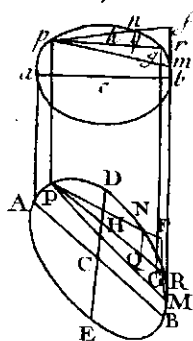
268



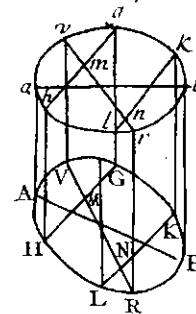
269



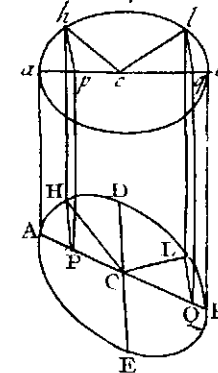
270



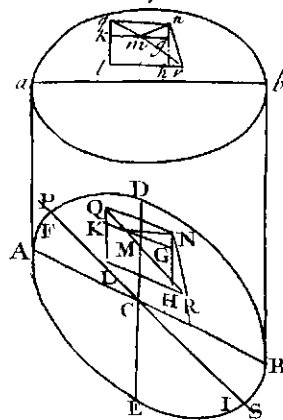
271



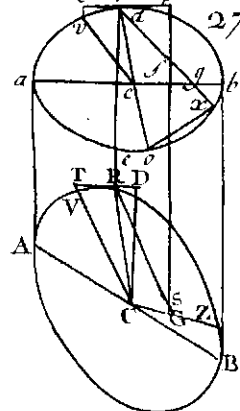
272



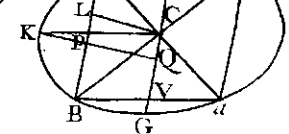
273



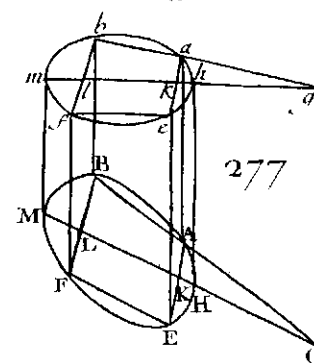
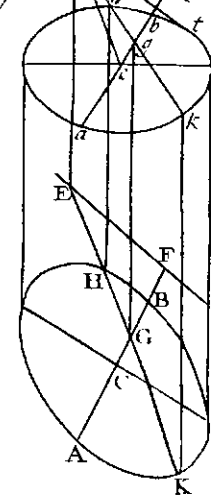
274



275



276



l'on voit qu'une section conique peut se décrire par ces cinq points, C, S, E, B & A, en menant une ligne DQN par D, qui rencontre AE en N, & AB en Q, joignant SQ & CN; car leur intersection P fera un point de la section conique. Et telle est la Méthode de décrire une section conique, par cinq points donnés, (lorsqu'il n'y en a pas plus de deux qui soient en ligne droite,) dont on a fait mention dans l'article 322. Le moyen de mener une tangente à un point C de la section conique, décrit dans l'article 324. peut se démontrer de la même manière, en faisant voir qu'il a lieu dans le cercle. Si l'on suppose qu'une ou plusieurs lignes droites, inscrites dans une section conique, deviennent tangentes, on pourra déduire brièvement, de cette Proposition, plusieurs propriétés de ces figures; particulièrement celle qui a été citée dans l'article 401. (comme analogue à la propriété des lignes du troisième ordre.) C'est le cas où les droites ESD & BCD deviennent tangentes en S & C.

624. Soient P, H & K trois points dans une ellipse, que PM, Fig. 280. parallèle à HK, & KN, parallèle à PH, rencontrent l'ellipse en M & N, une droite par H, parallèle à MN, sera tangente en H. Lorsque la figure est un cercle, l'arc HM=HN, MN est perpendiculaire au diamètre qui passe par H, & par conséquent parallèle à la tangente en H. Cette propriété s'étend à l'ellipse, par l'article 611 & 612. & peut se démontrer de toute section conique. Mais nous allons examiner les propriétés de l'ellipse que nous avons principalement en vue, à cause de leur usage dans les recherches suivantes.

625. Soit PH une corde d'une ellipse parallèle à l'axe DE, Fig. 281. LK une ordonnée à cet axe en V, qui rencontre l'ellipse en L & K, joignez DL & DK, que PM & PN, parallèles à DL & DK, la rencontrent en M & N, que MQ & MR soient perpendiculaires à PH en Q & R, la somme ou la différence de PQ & PR (selon que Q & R sont du même ou de différens côtés de P) fera à 2DV, comme la corde PH à l'axe DE. Car, supposant d'abord que la figure est un cercle; que le demi-diamètre HC rencontre encore la circonférence en I. Les arcs HM & HN étant égaux à EL & EK, & par conséquent entre-eux, la droite MN est divisée perpendiculairement & également en X, par le diamètre HI. Puisque l'arc MH=LE, IX est = DV; que XZ soit perpendiculaire à PH en Z; puisque l'an-

gle HIP est droit, $PZ : IX$ (ou DV) :: $PH : IH$ ou DE . Mais QR est divisée également en Z. (car $MX : QZ :: NX : RZ$.) Donc $PR \mp PQ = 2PZ$, & il est à $2DV :: PH : DE$. Cela s'étend à l'ellipse, par les articles 611 & 614. & peut se démontrer de toute section conique.

Fig. 282.

626. Que Pd & He soient perpendiculaires à l'axe DE en d & e , décrivez une ellipse $adbe$ sur l'axe de semblable à $ADBE$. Soit lk une ordonnée à une axe de l'ellipse intérieure de en v , qui rencontre cette ellipse en l & k . Que PM & PN , parallèles à dl & dk , rencontrent l'ellipse extérieure en M & N ; que MQ & NR soient perpendiculaires à PH en Q & R , $PR \mp PQ$ fera $= 2dv$. Car, $dv : DV :: de : (ou PH) DE$, & par conséquent :: $PR \mp PQ : 2DV$, par le dernier article. Donc $PR \mp PQ = 2dv$. On peut démontrer cela à la manière ordinaire par la propriété de l'ellipse, décrite à la fin de l'article 612.

627. Que la droite PS , perpendiculaire à l'ellipse en P , rencontre l'axe DE en S , & que SZ soit perpendiculaire au demi-diamètre CP en Z , le rectangle CPZ sera égal au carré du demi-axe CA conjugué à CD . Car, que PY , parallèle à AC , rencontre CD en d , & CO demi-diamètre conjugué en Y ; que PS rencontre CO en T . Puisque $PS : PZ :: PC : PT$, le rectangle $CPZ = SPT$, qui (à cause que $PT : PY :: Pd : PS$) est $= dPY$, & par conséquent $= CA^2$, par l'article 612. De même, si PS rencontre l'axe en s , le rectangle $sPT = CD^2$, & $PS : Ps :: CA^2 : CD^2$. parce que $dC : dS :: Ps : PS$, $dS : dC :: CA^2 : CD^2$.

Fig. 283.

628. Supposant que la gravitation vers une particule décroît en même proportion que le carré de la distance à cette particule croît, soient $PAEa$, $PBFb$ des cones semblables composés de pareilles particules terminées par des bases sphériques AEa , BFb , qui ont leur centre en P ; la gravitation en P vers le solide $PAEa$ fera à celle en P vers le solide $PBFb$, comme PA est à PB , ou en même raison que les côtés homologues de ces solides semblables. Car, soit MNm une surface semblable à AEa , ayant de même son centre en P ; la gravitation vers la surface AEa fera à celle vers la surface MNm , en raison composée de la directe des surfaces AEa à MNm , (ou de PA^2 à PM^2) & de l'inverse de PA^2 à PM^2 , c'est-à-dire, en raison d'égalité; par conséquent la gravitation vers la surface AEa A
étant

étant représentée par A , celle vers le solide $PAEa$ sera représentée par $A.PA$ & celle vers le solide semblable $PBFb$, par $A.PB$ qui sont en raison de PA à PB . De même, la gravitation vers le cone tronqué terminé par les surfaces AEa , MNm est représentée par $A.AM$. Il est évident que quoique les surfaces AEa , & MNm soient d'une autre figure, la dernière raison des gravitations en P vers les solides coniques ou pyramidaux $PAEa$, $PMNm$ est celle de PA à PM , & que si AQ & Mq sont perpendiculaires à PH en Q & q , ces forces réduites à la direction PH sont finalement en raison de PQ à Pq .

629. Les forces par lesquelles les particules semblablement situées par rapport aux solides semblables homogènes gravitent vers ces solides, sont comme leurs distances aux points semblablement situés dans ces solides, ou comme leurs côtés homologues. Car, on peut concevoir ces solides divisés en cones semblables, ou cones tronqués, qui ont toujours leurs sommets dans ces particules, & la gravitation vers ces cones, ou cones tronqués, sera toujours en même raison.

630. Une particule placée au-dedans d'un trou solide, qui est produit par l'espace annulaire, terminé par deux cercles concentriques, ou deux ellipses concentriques semblables $ADBE$ & $adb e$, n'a point de pesanteur vers ce solide. Car, soit p une telle particule, pk une droite depuis p qui rencontre le cercle, ou l'ellipse intérieure aux points f & q , & la figure extérieure aux points x & r ; si xr est divisée également en z , fz le sera de même, en z , parce que les figures sont semblables, & semblablement situées. Donc $fx = qz$; & les gravitations de p vers les parties opposées du solide qui ont leur sommet en p , & sont terminées par les mêmes droites prolongées depuis p avec des directions opposées seront toujours égales par l'article 628. & se détermineront mutuellement.

631. De-là, il suit que la pesanteur en un point p dans le diamètre CP vers la sphere où la sphéroïde est à la pesanteur en P , comme Cp est à CP ; parce que la gravitation vers le solide produit par l'espace annulaire, qui est renfermé entre APB , apb n'a point d'effet sur la particule en p ; de sorte que la pesanteur en p vers tout le solide $ADBE$ est égale à la pesanteur en p vers tout le solide $adb e$, laquelle est à la pesanteur en P vers le solide $ADBE$, comme Cp est à CP , par l'article 629.

Fig. 234.

632. Soient deux plans $PMKI$, $PNLI$ qui, se coupant dans la droite PI , renferment une portion du solide, composée de particules qui attirent en cette manière; soient P & G deux points dans la droite PI ; que GK soit toujours parallèle à PM , & que les plans PMN , GKL , perpendiculaires à $PMKI$, coupent le plan PNI en PN & GL ; la gravitation de P vers le solide pyramidal $PMmnN$ produit par le plan PMN roulant autour de P , sera à celle de G vers le solide pyramidal $GKklL$ produit par GKL roulant autour de G , en dernière raison de PM à GK , lorsque l'inclinaison des plans, & les angles égaux MPm , KGk sont supposés diminués jusques à disparaître. Car les droites PM & GK étant toujours parallèles, MN sera finalement à KL , comme PM est à GK , & l'angle $MPN = KGL$; par conséquent les angles MPm & KGk étant égaux, la gravitation de P vers le solide $PMmnN$ sera à celle de G vers $GKklL$, comme PM est à GK , par l'article 628.

Fig. 235.

633. Toutes les sections d'un sphéroïde faites par des plans parallèles, sont des ellipses semblables. Soit AB l'axe du solide, GPH une section d'un sphéroïde par un plan perpendiculaire à l'ellipse génératrice $ADBE$ en GH , & que PM soit perpendiculaire à GH en M ; que KML , perpendiculaire à AB axe du solide, rencontre l'ellipse $ADBE$ en K & L , & que CQ soit le demi-diamètre parallèle à GH . Puisque PM est perpendiculaire au plan $ADBE$, les points K , P & L seront dans un demi-cercle décrit sur le diamètre KL , $PM^2 = KML$, qui (par l'article 615.) est au rectangle GMH , comme CD^2 est à CQ^2 ; par conséquent la section GPH est une ellipse semblable à toute autre section du solide par un plan parallèle, la raison de l'axe GH à l'autre axe étant celle de CQ à CD . De là, il suit que les sections de deux sphéroïdes semblables concentriques semblablement situés, faites par le même plan, sont des ellipses semblables; parce qu'elles seront semblables aux sections des mêmes solides par un plan parallèle, qui passe par leur centre commun; & ces dernières sont semblables, par l'article 122. On voit, de même, que toutes les sections du sphéroïde, faites par des plans perpendiculaires au cercle produit par l'axe CD , (que nous pouvons appeler équateur du solide) sont semblables à l'ellipse génératrice $ADBE$.

634. La pesanteur d'une particule d'une sphere, ou d'un sphé-

roïde étant décomposée en deux forces, l'une perpendiculaire à l'axe du solide, l'autre au plan de son équateur, toutes les particules également distantes de l'axe tendent vers lui avec des forces égales, & toutes les particules à égales distances du plan de l'équateur, gravitent également vers ce plan, soit que les particules soient à la surface du solide, ou en-dedans. Et les forces, avec lesquelles les particules, à différentes distances de l'axe, tendent vers lui, sont comme ces distances; on doit dire la même chose des forces avec lesquelles elles tendent vers le plan de l'équateur. Cela paroît aisément dans la sphere, par ce qui a été démontré dans l'article 631. & qui a été rapporté seulement à cause de l'analogie. Soit P un point dans la surface du sphé-

roïde, $APDBE$ une section du solide par son axe AB , Pf perpendiculaire à AB en f , Pd perpendiculaire à l'équateur du solide en d ; la pesanteur en P , vers le solide, étant décomposée en une force dans la direction Pf , & une autre dans la direction Pd , la première sera égale à la pesanteur en d vers le solide, & la seconde à la pesanteur en f . Soit $adbe$ un sphéroïde semblable à $ADBE$, ayant le même centre C , & son axe ab dans la même droite AB avec l'axe du solide extérieur. Les sections de ces sphéroïdes par un plan qui passe par la droite PdI feront des ellipses semblables concentriques semblablement situées, par l'article 633. & la pesanteur de P dans la direction Pf , perpendiculaire à l'axe AB , qui vient de l'attraction d'une position ou tranche du solide extérieur, compris par deux plans pareils, sera égale à la pesanteur en d dans la direction dC , qui vient de l'attraction de la tranche du solide intérieur, compris par les mêmes plans. Pour démontrer ceci, soient $PMNIG$, $Pmnig$ (dans la figure suivante) les sections du solide extérieur, par deux pareils plans, $dKLd$ & $dkld$ les sections du solide extérieur, par les mêmes plans; soit KL une ordonnée en V à de , axe de l'ellipse intérieure, qui est dans le plan de l'équateur du solide; joignez dK & dL , & soient PM & PN toujours parallèles à dK & dL respectivement. Que les plans PMm , PNn , dKk , dLl , perpendiculaires au plan $PMNIG$, rencontrent $Pmnig$ dans les droites Pm , Pn , dk & dl respectivement; & que ces plans roulent autour des points P & D , PM étant toujours parallèle à dK , & PN à dL , pendant que V est supposée décrire la droite ed . Les forces avec lesquelles P & d sont attirées vers les solides pyramidaux, produits par

Fig. 286.

Fig. 287.

les plans PMm , PNn , dKk & dLl seront finalement comme les droites PM , PN , dK & dL respectivement, par l'article 632. & Pp étant parallèle à de , MQ & NR perpendiculaires à Pp en Q & R , si ces forces sont décomposées en celles qui agissent dans les directions Pp & de , & celles qui agissent dans les droites perpendiculaires à celles-là, les premières seront comme les droites PQ , PR , dV , & dV . Mais $PR \mp PQ$ est toujours $= 2dV$, par l'article 626. Donc la pesanteur de P , dans la direction Pp , venant de l'attraction des solides pyramidaux, produits par les plans PMm & PNn , est à la fin égale à la pesanteur de d dans la direction de , venant de l'attraction des solides pyramidaux, produits par les plans dKk & dLl . Et puisque cela a toujours lieu, pendant que nous concevons que le point V décrit ed , & que ces plans décrivent les portions des solides extérieurs & intérieurs, terminés par $PMNIG$ & $PmnIg$, il suit, que la pesanteur de P , dans la direction Pp , venant de l'attraction de toute la position du solide extérieur, terminé par les plans $PMNIG$, $PmnIg$ est à la fin égale à la pesanteur de d dans la direction de qui vient de l'attraction de la partie du solide intérieur, terminé par les mêmes plans, lorsque l'angle qu'ils forment ensemble est supposé diminué jusques à disparaître. En concevant d'autres tranches des solides, compris par les plans qui passent par PdI , & forment des angles égaux avec le plan $APDB$ de l'autre côté, qui attirent les particules P & d , on verra que les pesanteurs de P & d , vers l'axe du sphéroïde provenant de l'attraction réunie de ces tranches, seront égales. Et puisque cela a lieu dans toutes les portions des solides compris par des pareils plans, il suit, que la force, avec laquelle P tend vers l'axe AB provenant de l'attraction de tout le sphéroïde, est égale à la pesanteur de d vers le solide intérieur, ou (par l'article 631.) à sa pesanteur vers tout le solide extérieur $ADBE$. La pesanteur d'une particule p , située dans la droite Pd vers le sphéroïde $ADBE$, est égale à sa pesanteur vers un sphéroïde semblable concentrique semblablement situé, qui a Cp pour son demi-diamètre, par l'article 631. & par conséquent sa pesanteur dans la direction perpendiculaire à AB est égale à la pesanteur de d vers le solide $adbe$, par ce qui a été démontré. Donc, toutes les particules, également distantes de l'axe, tendent vers lui avec des forces égales; & parce que la pesanteur en d est à la pesanteur en D , comme Cd est

Fig. 286.

à CD, par l'article 631. il suit, que la pesanteur de P vers l'axe est à la pesanteur de D vers le sphéroïde, comme Pf est à DC. On démontré de même, que la pesanteur de P, vers le plan de l'équateur, est égale à la pesanteur de f vers le sphéroïde ADBE, & qu'elle est à la pesanteur en A vers le sphéroïde, comme fC, ou Pd est à AC.

635. Pour trouver donc la direction selon laquelle le sphéroïde attire une particule en P, & la force de cette attraction, que A exprime l'attraction au pôle A, & D celle à l'équateur; soit Pd perpendiculaire au plan de l'équateur en d, prenez sur dC, de d vers C, dQ, enforte que $dQ : dC :: D.CA : A.CD$. Joignez PQ. L'attraction vers le sphéroïde se fera dans la direction PQ, & sera toujours mesurée par cette droite PQ. Car la pesanteur vers le sphéroïde dans la direction Pd étant à A, pesanteur au pôle, comme Pd est à AC, & la pesanteur en P dans la direction Pf, ou dC étant à D, comme dC est à DC, par le dernier article; il suit que la pesanteur en P, dans la direction Pd est à celle en P dans la direction Pf ::

$$A. \frac{Pd}{AC} : D. \frac{dC}{DC}, \text{ c'est-à-dire, (par la supposition) } :: Pd.dC :$$

$dC.dQ$, & par conséquent la pesanteur en P est dans la direction PQ; & si la pesanteur en A vers le sphéroïde est représentée par AC, celle en P, dans la direction Pd, sera représentée par Pd, & celle en P vers le sphéroïde par PQ. De même, si l'on prend fq sur l'axe, depuis f vers C en même raison à fC, que A.CD à D.CA, Pq exprimera toujours la direction, & la mesure de la force de la pesanteur en chaque point P vers le sphéroïde, en supposant la pesanteur en D représentée par DC. Que Dx, perpendiculaire à CD, représente la pesanteur en D; joignez Cx, puisque la pesanteur d'une particule, dans le demi-diamètre CD, est comme sa distance de C, la pesanteur de la colonne DC (le sphéroïde étant supposé fluide) sera mesurée par le triangle CDx, ou $\frac{1}{2} CD.Dx$, ou $\frac{1}{2} CD.D$. De même, la pesanteur de la colonne AC sera mesurée par $\frac{1}{2} AC.A$, & comme les colonnes CD & AC gravitent également dans la sphere; ainsi la pesanteur de la colonne CD est plus grande, ou plus petite que celle de la colonne AC dans le sphéroïde, selon qu'il est applati ou allongé, & CD.D est plus grand ou moindre que CA.A, selon que CD est plus grand ou moindre que CA, (parce que le fluide s'abaîsseroit, dans le premier cas,

en D, & dans le second, en A jusques à ce que la figure devint sphérique.) Mais cela se démontrera plus clairement dans la suite, lorsque nous viendrons à déterminer la raison de A à D dans un sphéroïde donné.

636. Jusques ici, nous avons supposé que les particules du sphéroïde étoient seulement affectées de leur mutuelle gravitation l'une vers l'autre. Supposons maintenant que de nouvelles forces agissent sur toutes les particules du sphéroïde, par des lignes droites, soit perpendiculaires à l'axe du sphéroïde, ou au plan de son équateur; ou que quelques forces agissent en lignes droites, perpendiculaires, & d'autres en lignes parallèles, & que chaque force varie toujours comme la distance des particules à l'axe, ou à l'équateur auquel la direction de la force est supposée perpendiculaire. Le sphéroïde étant supposé fluide, si CA est à CD réciproquement comme les forces totales, qui agissent sur les particules égales en A & D, le fluide sera de toutes parts en équilibre. Pour démontrer pleinement cette Proposition, il faut faire voir, 1°. que la force qui résulte de l'attraction du sphéroïde, & de ces forces étrangères composées ensemble, agit toujours dans une droite perpendiculaire à la surface du sphéroïde : 2°. que les colonnes du fluide se soutiennent & se balancent mutuellement au centre du sphéroïde, & 3°. que chaque particule, dans le sphéroïde, est poussée également dans toutes les directions.

Fig. 286.

637. 1°. Que les forces qui résultent de l'attraction du sphéroïde, & des forces étrangères en A & D soient nommées M & N; M sera à N, comme CD est à CA, par la supposition. Puisque l'attraction du sphéroïde en P, dans la direction Pd, est à son attraction en A, comme Pd est à AC, & que la force de chaque puissance étrangère en P, est supposée à la force de la même puissance en A, comme Pd est à AC; il suit, que toute la force, par laquelle une particule en P tend selon la direction Pd, est à M, comme Pd est à AC. De même, toute la force par laquelle une particule en P tend selon la direction Pf, est à N, comme Pf, ou dC est à DC. Donc la force avec laquelle P tend selon la direction, Pd est à la force avec laquelle il tend selon la direction Pf, comme $M \cdot \frac{Pd}{AC}$ est à $N \cdot \frac{dC}{DC}$; & supposant que PK, qui rencontre CD en K, est la direction dans laquelle une particule en P tend vers le sphéroïde, par la compo-

sition de ces deux forces, Pd fera à dK dans la même raison; en sorte que $dK : dC :: N.AC : M.DC$, ou (parce que $N : M :: AC : DC$) :: $AC^2 : DC^2$. Mais si PK est supposée perpendiculaire à l'ellipse $APDB$ en P , dK fera à dC dans cette même raison, par l'article 627. Donc chaque particule en P , à la surface du sphéroïde, tend vers lui dans une droite perpendiculaire à sa surface : & la force M , qui agit sur une particule au pôle A , étant représentée par le demi-axe AC , celle qui agit sur une égale particule, en quelque point de la surface P , sera toujours représentée par la perpendiculaire PK terminée par le plan de l'équateur du solide en K . On trouve de même, que chaque particule p , au-dedans du sphéroïde dans le demi-diamètre CP , tend dans la direction pk parallèle à PK avec une force qui est mesurée par la droite pk terminée par le même plan en k , parce que les forces qui agissent sur P & p dans les droites perpendiculaires à l'axe, ou à l'équateur, sont comme les distances de l'axe, ou de l'équateur, par la supposition.

638. Pour faire voir qu'un sphéroïde étant fluide, les colonnes se soutiennent mutuellement au centre, soient KZ & kz perpendiculaires à PC en Z & z ; la force M qui agit au pôle A étant représentée par le demi-axe AC , celles, avec lesquelles les particules en P & p tendent dans la direction PC , seront représentées par PZ & pz respectivement, & parce que $pz : PZ :: Cp : CP$, la pesanteur de toute la colonne PC , dans la direction PC , sera mesurée par $\frac{1}{2}PZ.PC$, qui est $= \frac{1}{2}CA^2$, (par l'article 627.) ou à $\frac{1}{2}CA.M$. Donc la pesanteur d'une colonne PC , dans la direction PC , est égale à celle d'une colonne AC dans la direction AC , & toutes les colonnes du fluide se soutiennent mutuellement en C .

639. Soit p une particule dans le sphéroïde; Pp une colonne depuis la surface au point p , prolongez Cp jusques à ce qu'elle rencontre la surface en q ; sur CA prenez CO en même raison à CA que Cp à Cq ; la pesanteur de la colonne Pp , dans la direction Pp , sera égale à celle de la colonne AO dans la direction AC . Premièrement, soit Pp dans le plan $APDB$, que PG & pg soient perpendiculaires au plan de l'équateur en G & g , PL & pl à l'axe AB en L & l , & Pp étant supposée rencontrer AB en f , & DC en h , soient ge & lu perpendiculaires à Pp en e & u . La force, avec laquelle la particule p tend selon la droite parallèle à l'axe, sera à M , comme pg à

Fig. 288.

AC par la supposition; & cette force réduite à la direction Pp ; fera à $M :: pe : AC$. La force, avec laquelle p tend selon la direction perpendiculaire à l'axe, est à N , comme pl est à DC , & cette force réduite à la direction Pp est à N , comme pu est à DC . Donc toute la force avec laquelle p tend selon la direction Pp est $M \cdot \frac{pe}{AC} + N \cdot \frac{pu}{DC}$, ou $M \cdot \frac{ph}{AC} \cdot \frac{pg^2}{ph^2} + N \cdot \frac{pf}{DC} \cdot \frac{pl^2}{pf^2}$. D'où il suit que la pesanteur de toute la colonne Pp ; dans la direction Pp , est $\frac{M}{2AC} \cdot \frac{pg^2}{ph^2} \cdot (hP^2 - hp^2) + \frac{N}{2DC} \cdot \frac{pl^2}{pf^2} \cdot (fP^2 - fp^2)$ c'est-à-dire, $\frac{M}{2AC} (PG^2 - pg^2) + \frac{N}{2DC} (PL^2 - pl^2)$. Mais $PL^2 : CA^2 - CL^2 \& pl^2 : CO^2 - CL^2 :: CD^2 : CA^2$. Donc $PL^2 - pl^2$ est à la différence de $CA^2 - CL^2$, & $CO^2 - CL^2$ en même raison, & (parce que $M : N :: CD : CA$) toute la pesanteur de la colonne Pp , dans la direction Pp , sera à $\frac{1}{2} M \cdot AC :: CL^2 - Cl^2 + CA^2 - CL^2 - CO^2 + Cl^2 : 1CA^2$, c'est-à-dire $:: CA^2 - CO^2 : CA^2$, & par conséquent égale à la pesanteur de la colonne AO dans la direction AC . Donc la particule p est pressée également, dans toutes les directions, sur le méridien $APDB$, qui passe par p . On fera voir que toutes les autres colonnes, depuis la surface du sphéroïde jusques à la particule p , pressent également sur elle, & se soutiennent mutuellement.

640. Nous concluons, que lorsque les particules d'un fluide sphéroïde d'une densité uniforme, gravitent l'une vers l'autre, avec des forces qui sont réciproquement comme les quarrés de leurs distances mutuelles, & avec d'autres puissances qui agissent sur les particules du fluide, soit en lignes droites perpendiculaires à l'axe, variant en même proportion que les distances à l'axe, soit en lignes droites perpendiculaires au plan de l'équateur variant, comme leurs distances à l'équateur, ou lorsque des puissances agissent sur les particules du sphéroïde, qui peuvent se réduire à celles-là; si toute la force, qui agit au pôle A , est à toute celle qui agit à la circonférence de l'équateur, comme le rayon de l'équateur au demi-axe du sphéroïde, le fluide sera par tout en équilibre; les surfaces semblables & concentriques à $ADBE$ seront des surfaces de niveau à toutes les profondeurs, & les forces par lesquelles les particules égales, dans ces surfaces vers le sphéroïde, seront mesurées par les perpendiculaires

pendiculaires aux surfaces terminées, soit par le plan de l'équateur, ou par l'axe du sphéroïde.

641. Ce Théorème est utile dans plusieurs recherches Philosophiques. Supposons d'abord qu'un sphéroïde fluide $ADBE$, d'une densité uniforme, roule autour de son axe AB ; que l'attraction du sphéroïde au pôle A soit représentée par A ; celle à la circonférence de l'équateur par D , la force centrifuge, qui s'y produit par la rotation du fluide, soit $=V$; si $CA : CD :: D - V : A$, ou $V = D - A \cdot \frac{CA}{CD}$, le fluide sera de tous côtés en équilibre. Car, en ce cas, $M = A$, n'y ayant point de force centrifuge au pôle; la force N , qui agit sur chaque particule dans la circonférence de l'équateur, est $= D - V$, excès de l'attraction sur la force centrifuge de cette particule; & la force centrifuge, par laquelle chaque particule du sphéroïde tâche de s'écarter de son axe, en conséquence de la rotation du sphéroïde, est comme sa distance à l'axe; par conséquent si A est à $D - V$, comme CD est à CA , le fluide sera en équilibre dans toutes ses parties, par ce qui a été démontré. On voit donc que si la Terre, ou une autre Planète étoit fluide, & d'une densité uniforme, la figure, qu'elle prendroit en conséquence de sa rotation diurne, seroit exactement celle d'un sphéroïde aplati, produit par une ellipse qui roule autour de son second axe, comme Newton l'a supposé: & nous ne pouvons nous dispenser de remarquer, que comme aucune théorie de la pesanteur n'a de fondement dans la nature que la sienne seule, aussi aucune autre ne nous donne une figure aussi simple des Planetes, comme on le verra par la comparaison de ce qui a été démontré ci-devant dans l'article 492. On peut appliquer de même ce théorème à la théorie des marées. Mais avant que d'en venir au détail, nous ferons voir comment la pesanteur vers un sphéroïde au pôle, se mesure aisément par une aire circulaire, ou hyperbolique, selon que le sphéroïde est aplati, ou allongé; & comment la pesanteur, vers le sphéroïde à la circonférence de l'équateur, ou à chaque distance de l'axe, ou dans le plan de l'équateur prolongé, se détermine par la pesanteur au pôle, sans aucune nouvelle quadrature ou calcul. Pour cela, nous allons démontrer le Lemme suivant.

642. Soit $ADda$ une section d'un solide d'une densité uniforme, par un plan qui passe par un point donné P , & PC ,
Tome II. P.

Fig. 286.

Fig. 289.

PH des droites données de position dans ce plan; qu'une droite PM menée de P rencontre la figure ADda en M & m, & le cercle décrit avec le rayon donné PC en N; que MQ & mq soient toujours perpendiculaires à PC en Q & q, & NS perpendiculaire à PH en R; sur RN, prenez RK = PQ — Pq, & que l'ordonnée RK, toujours déterminée de cette manière, produise l'aire H G g h, pendant que PM roule autour de P, de PA à Pa. Si nous supposons un autre plan qui passe par la droite PH, & coupe le même solide, la pesanteur de la particule P vers la tranche du solide comprise entre ces deux plans, & celui qui a pour base ADda, étant réduite à la direction PC, sera à la fin comme $\frac{GHgh}{PC}$, l'angle compris par les deux plans étant supposé diminué continuellement jusques à disparaître. Car, qu'une autre droite PS rencontre la figure ADda en S & s, & le cercle BNB en n; que MZ & nr soient perpendiculaires à PH en Z & r; que l'arc Mo, décrit du centre P, rencontre PS en o, & que Mx, ou soient perpendiculaires en x & u à l'autre plan, qui est supposé passer par PH. Si le point P est en-dehors de la figure ADda, la pesanteur en P, vers le solide pyramidal PMoux, sera finalement comme $Mm \times \frac{Mo.Mx}{PM^2}$, par l'article 628. ou (parce que Mx est comme MZ) comme $Mm \cdot \frac{Mo.MZ}{PM^2}$, c'est-à-dire, parce que Mo : Nn :: MZ : NR, & que le rectangle, Mo.MZ : Nn.NR :: PM² : PC²,) comme $Mm \cdot \frac{Nn.NR}{PC^2}$, ou (Nn étant à Rr :: PC : NR,) comme $Mm \cdot \frac{Rr}{PC}$; & la pesanteur de P vers ce solide, réduite à la direction PC, sera comme $Qq \cdot \frac{Rr}{PC}$, ou $RK \cdot \frac{Rr}{PC}$. Mais RK.Rr mesure finalement la Fluxion de l'aire HGKR. Donc la pesanteur de P dans la direction PC, qui résulte de l'attraction de toute la tranche du solide, qui a pour sa base la figure ADda, est finalement comme $\frac{HGgh}{PC}$, l'angle compris par les plans, qui terminent la tranche, étant continuellement diminué. Lorsque le point P est entre M & m, RK doit être pris = PQ — Pq, & la pesanteur en P se mesure de même. Il suit, de ce Lemme, que supposant que la figure ADda roule autour de l'axe PH, & produit un solide, la direction PC se confondant avec PH, la pesanteur en P vers ce solide en-

tier fera comme $\frac{HGgh}{PC}$. Lorsque la particule P est tellement située par rapport à la figure ADda, que les perpendiculaires des points M coupent PC de différens côtés de P, la pésanteur en P, dans la direction PC, doit se déterminer par la différence des aires qui sont produites par l'ordonnée RK.

643. Qu'une particule en P grave vers la sphere produite par le demi-cercle ADB autour de l'axe AB, & C étant le centre de la sphere; qu'une droite PM rencontre le demi-cercle en M & m, & le cercle CNH décrit du centre P en N. Soit NR perpendiculaire à PC en R, & RK toujours = Qq lorsque P est hors de la sphere ou qu'il la touche. Soit CL perpendiculaire à PM en L, & Mm étant divisée également en L, LM² fera = PL² — MPm, ou PR² — APB, & la Fluxion de LM² = à celle de PR²; enforte que la Fluxion de PR fera à celle de LM, comme LM à PR. Et parce que KR ou Qq : 2 LM :: PR : PN, la Fluxion de l'aire produite par l'ordonnée KR est, dans ce cas, égale au rectangle sous $\frac{2 LM^2}{PC}$, & sous la Fluxion de LM. Donc l'aire IRK = $\frac{2 LM^3}{3 PC}$, & la pésanteur en P vers la portion de la sphere produite par le segment MDm autour de l'axe AB est comme $\frac{2 LM^3}{3 PC^2}$, & par conséquent comme le cube de Mm, corde du segment MDm, directement, & comme le quarré de PC distance de la particule au centre réciproquement. Ainsi la pésanteur en P vers toute la sphere est comme le cube de son diamètre (ou sa quantité de matiere la densité étant donnée) directement, & comme le quarré de PC réciproquement; & elle est la même que si nous concevions toute la matiere ramassée au centre. On doit dire la même chose de la pésanteur, vers la somme d'un nombre quelconque, de pareilles spheres qui ont un centre commun; d'où il suit que quelque variable que soit la densité d'une sphere à différentes distances du centre, pourvû que cette densité soit toujours la même à égales distances, la pésanteur d'une particule (qui n'est pas dans la sphere) vers elle sera comme la quantité de matiere dans la sphere directement, & comme le quarré de la distance de la particule à son centre réciproquement. On voit, par ce qui a été démontré, que toute l'aire IKGC + $\frac{2 AC^3}{3 PC^2}$,

Pij

Fig. 2902

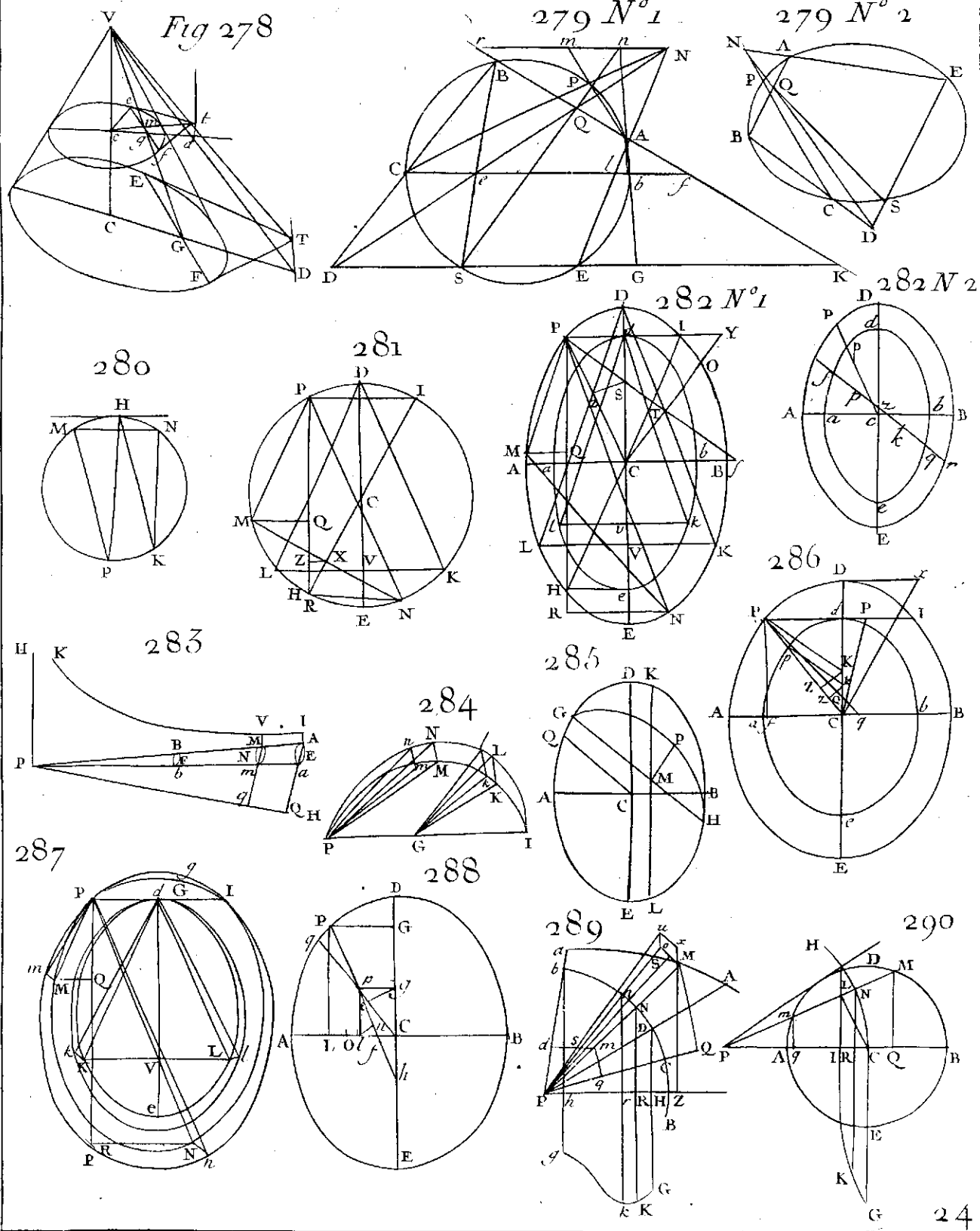
& que la p santeur en A vers la sphere ADBE est mesur e par $\frac{2AC}{3}$ conformément au dernier article.

Fig. 291.

N. 1. & 2.

644. Soit maintenant ADBE un sphéroïde d'une densité uni-
forme, produit par la demi-ellipse ADB, roulant autour de l'axe AB; soit AM une droite men e du pole A, rencontrant l'ellipse en M, & le cercle CNH en N; soient MQ & NR perpendiculaires à AB en Q & R; sur RN, prenez toujours RK = AQ, & que cette ordonnée RK produise l'aire AKGC, pendant que AM roule autour de A & décrit l'aire de la demi-ellipse ADB. La p santeur au pole A vers le sphéroïde ADBE fera mesur e par $\frac{AKGC}{AC}$, (par l'article 642.) & elle est à la p santeur en A vers la sphere décrite sur le diamètre AB, (laquelle est mesur e par $\frac{2}{3}AC$, selon le dernier article,) comme l'aire AKGC est à $\frac{2}{3}AC^2$.

645. La p santeur en D   la circonférence de l' quateur vers le sphéroïde est à la p santeur en D vers la sphere, décrite sur le diamètre de l' quateur, comme $2AC^2 - AKGC$ est à $\frac{2}{3}AC$, & à la p santeur au pole A, comme $2AC^2 - AKGC$ est à $2AKGC \cdot \frac{CD}{CA}$. Car, supposons que les deux sections elliptiques DBEA & Dbea sont perpendiculaires au plan de l' quateur du solide, & se coupent mutuellement dans la droite hDg leur commune tangente en D; qu'une droite Dm, men e de D, rencontre l'ellipse en m, & le cercle cnh décrit du centre D avec le rayon Dc (= AC) en n; soit mq perpendiculaire à DE en q, & nr, perpendiculaire à Dh en r, rencontrant mq en k, & soit hkED l'aire produite par l'ordonnée rk, pendant que Dm roule autour de D, & décrit l'aire elliptique DBE; la p santeur en D vers la tranche du sphéroïde comprise par les plans DBEA, Dbea fera à la fin mesur e par $\frac{hkED}{Dc}$, l'angle compris par ces plans étant donné, par l'article 642. Mais si RK prolong e rencontre GI parallèle à AC en x, & que les droites AM & Dm roulent autour de A & de D, enforte que l'angle hDm soit toujours égal à BAM, DN  tant = AN, & l'angle rDn = RAN, Dr fera toujours = AR & hr = CR, ou Gx. Puisque $qm^2 : DqE :: AQB : QM^2$, & les triangles Dqm, MQA étant semblables, $qm : Dq :: AQ : QM$; donc $qm : qE :: QB : QM$, & $Dq : qE :: QB :$



A Q. Donc DE & BA seront divisées en même proportion en q & Q, en sorte que $Dq : QB :: rk : xk :: DE : AB$. Donc les bases hr & Gx étant toujours égales, l'aire hrk est à l'aire GxK en même raison constante de DE à AB & l'aire $hkED : GKAI$ (ou $CA \cdot AB - AK \cdot GC$) :: $CD : CA$. Lorsque ADBE est un cercle sur le diamètre DE, ou $CD = CA$, l'aire $AKGC = \frac{2}{3} CD^2$, (par l'article 643.) & $GKAI = \frac{4}{3} CD^2$. Donc (par l'article 642.) la pesanteur en D vers la branche du sphéroïde comprise par les plans DBEA & Dbea est à la pesanteur en D vers la tranche de la sphere sur le diamètre DE, & comprise par les mêmes plans, comme $\frac{hkED}{DC}$ est à $\frac{4CD}{3}$, c'est-à-dire, comme $\frac{2CA^2 - AKGC}{CA} \cdot \frac{CD}{CA}$ est à $\frac{4}{3} CD$, ou :: $2CA^2 - AKGC : \frac{4CA^2}{3}$. La pesanteur en D vers le sphéroïde est à la pesanteur au même point vers la sphere du diamètre DE en même raison; parce que la section du sphéroïde, par un plan perpendiculaire à l'équateur, est toujours une ellipse semblable à EBDA, & la section de la sphere sur le diamètre de l'équateur, faite par le même plan, est toujours un cercle, ayant pour diamètre l'axe de la premiere section qui est homologue avec DE; la pesanteur en D, vers la tranche elliptique du sphéroïde comprise par deux plans pareils, est toujours finalement en même raison à la pesanteur en D vers la tranche circulaire de la sphere, comprise par les mêmes plans. Donc, la pesanteur en D, vers le sphéroïde ADBE, est à la pesanteur en D, vers la sphere décrite sur le diamètre de l'équateur, comme $2CA^2 - AKGC$ est à $\frac{4}{3} CA^2$. Mais la pesanteur en D, vers cette sphere, est à la pesanteur en A, vers la sphere décrite sur l'axe AB, comme CD est à CA; & cette derniere pesanteur est à la pesanteur en A vers le sphéroïde ADBE, comme $\frac{2}{3} CA^2$ est à $AKGC$, par le dernier article. Donc la pesanteur en D, vers le sphéroïde, est à la pesanteur en A vers le même, comme $2CA^2 - AKGC$ est à $2AKGC \cdot \frac{CA}{CD}$. On voit aussi que la pesanteur en A, vers une sphere décrite sur l'axe AB, étant représentée par $\frac{2}{3} CA$, selon l'article 643. la pesanteur en A, vers le sphéroïde, sera mesurée par $\frac{AKGC}{AC}$, & la pesanteur en D vers le même, par $\frac{2CA^2 - AKGC}{CA^2} \cdot CD$, ou $CD - \frac{AKGC}{2CA} \cdot \frac{CD}{CA}$.

646. Pour mesurer l'aire $AKGC$, soit F le foyer de l'ellipse génératrice; puisque $AQ : QM$ (ou $AQ.QM : QM^2$) :: $AR : RN$, & $QM^2 : AQ.QB :: CD : CA^2$; il suit que $AQ.QM : AQ.QB$ (ou $QM : QB$) :: $AR.CD^2 : RN.CA^2$; par conséquent $AQ : QB :: AR^2.CD^2 : RN^2.CA^2$, & (parce que $RN^2 = CA^2 - AR^2$) AQ , ou $RK : AB :: AR^2 . \frac{CD^2}{CA^2} : CA^2 + \frac{CF^2}{CA^2} . AR^2$, ou $CA^2 - \frac{CF^2}{CA^2} . AR^2$, selon que le sphéroïde est applati, ou allongé; c'est-à-dire, (si l'on prend Cf sur CF en même raison à AR , que CF à AC), comme $Cf^2 . \frac{CD^2}{CF^2}$ à Af^2 , dans le premier cas, & à $CA^2 - Cf^2$, dans le second. Si dans le premier cas Af & AF rencontrent le cercle CNH en s & S , la Fluxion de $Cf - Cs$ sera à celle de Cf , comme Cf^2 à Af^2 , (article 195.) c'est-à-dire, comme $RK.CF^2$ à $AB.CD^2$. & à la Fluxion de AR , comme $RK.CF^3$ est à $2CA^2.CD^2$. Donc la Fluxion de l'aire ARK sera à celle de $2CA \times (Cf - Cs) :: CA.CD^2 : CF^3$, & ARK sera à $2CA(Cf - Cs)$ en même raison, & toute l'aire $AKGC = \frac{2CA^2.CD^2}{CF^3}$, ($CF - CS$.) Donc la pesanteur en A vers la sphere décrite sur l'axe AB étant représentée par $\frac{2}{3}AC$, celle en A vers le sphéroïde $ADBE$ sera mesurée par $\frac{2CA.CD^2}{CF^3}$, ($CF - CS$.) La pesanteur en D vers le même sphéroïde, (art. 645.) par $CD . \frac{CD^3}{CF^3}$, ($CF - CS$) ou $\frac{CD^3.CS - CD.CF(CD^2 - CF^2)}{CF^3}$, c'est-à-dire, par $CD \times \frac{CD^2.CS - CA^2.CF}{CF^3}$; & la pesanteur en A sera à celle en D , comme $2CA.CD.(CF - CS) : CD^2.CS - CA^2.CF$, ou si l'arc FO , décrit du centre A , rencontre CB en O , comme $CD.(CF - CS)$ est au segment FCO , parce que ce segment est égal à $\frac{1}{2}CD.FO - \frac{1}{2}CA.CF$, ou $= \frac{CD^2.CS - CA^2.CF}{2CA}$.

Fig. 291.
N. 2.

647. Lorsque $CA > CD$, ou que $ADBE$ est un sphéroïde allongé, le reste subsistant comme dans le dernier article, prenez LC sur CA égal au logarithme de la raison de CD à AF , ou de la raison sous-doublée de BF à AF , le module étant AC ; & la pesanteur au pôle A sera à celle en D , comme $2CA.CD.LF$ est à $CA^2.CF - CD^2.CL$. Car, en ce

cas, nous trouvons que l'ordonnée RK est à AB, comme $Cf^2 \cdot \frac{CD^2}{CF^2} : CA^2 - Cf^2$. Mais si l'on prend Cl sur CA, en sorte qu'il représente le logarithme de la raison de $\sqrt{CA + Cf}$ à $\sqrt{CA - Cf}$ le module étant AC, la Fluxion de Cl — Cf fera à celle de Cf, comme Cf^2 à $CA^2 - Cf^2$, ou :: RK.CF² : AB.CD², & à la Fluxion de AR, comme RK.CF³ : 2 CA².CD². Donc la Fluxion de l'aire ARK est à celle de 2CA (Cl — Cf) :: CA.CD² : CF³, & toute l'aire AKGC = $\frac{2CA^2.CD^2}{CF^3}$. LF. Donc la pesanteur en A, vers le sphéroïde allongé ADBE, est mesurée par $\frac{2CA.CD^2}{CF^3}$. LF; la pesanteur en D, (art. 645.) vers le sphéroïde par CD — $\frac{CD^3}{CF^3}$. LF, ou CD. $\frac{CA^2.CF - CD^2.CL}{CF^3}$, & la pesanteur en A est à celle en D, comme 2CA.CD.LF est à $CA^2.CF - CD^2.CL$. Tout ce qu'on vient de démontrer, concernant la pesanteur au pôle A, s'accorde avec ce qu'avoient avancé, il y a long-tems, Newton & Cotes, qui se sont contentés d'une approximation, pour déterminer la pesanteur à l'équateur, laquelle est assez exacte lorsque le sphéroïde diffère fort peu de la sphere. Les approximations proposées, en dernier lieu, sur ce sujet, *Phil. transf. N.* 438 & 445. sont exactes, & M. Stirling, après avoir déterminé la pesanteur à l'équateur par une suite convergente, a enfin trouvé que la somme de cette suite peut se déterminer par la quadrature du cercle. On a fait voir dans l'article 645. que cette pesanteur à l'équateur se conclut exactement de celle au pôle, sans aucun nouveau calcul, ou quadrature. La pesanteur, dans toute autre latitude, se détermine par ce qui a été démontré dans l'article 635. où l'on doit prendre dQ à dC, en même raison que CD².CS — CA².CF à 2CD². (CF — CS) afin que PQ mesure la force, & marque la direction de la pesanteur en P. La pesanteur, en chaque distance dans l'axe du sphéroïde, ou plan de l'équateur prolongé, se détermine aussi exactement, par ce qui a été démontré sans aucun nouveau calcul, au moyen du Lemme suivant.

648. Soient ADB, Pdp deux demi-ellipses qui ont le même centre C, & le même foyer F. Soit une droite PmM, qui de P rencontre l'ellipse intérieure en m & M, & Px l'extérieure en x, en sorte que CL, perpendiculaire de C en L sur Px, soit

Fig. 286.

Fig. 292.

à CR, perpendiculaire sur PM, comme Cd est à CD; Mm sera à Px :: CA à CP. Car, soient Pyp & AvB deux demi-cercles décrits sur les diamètres Pp & AB; que mv & MV, parallèles à CD, rencontrent le cercle AvB en v & V, & que xy, parallèle à CD, rencontre le cercle Pyp en y; prolongez mv & xy jusques à ce qu'elles rencontrent Pp en q & I, & que Cr & Cl soient perpendiculaires à Pv & Py en r & l respectivement. Puisque $Pm^2 : PC^2 :: qm^2 : CR^2$, & $Px^2 : PC^2 :: Ix^2 : CL^2$; il suit, que $Pm^2 : Px^2 :: \frac{qm^2}{CR^2} : \frac{CL^2}{Ix^2}$, c'est-à-dire, par la supposition :: $\frac{qm^2}{CD^2} : \frac{Ix^2}{Cd^2}$, ou (parce que qm^2 est à la différence de qm^2 , & $qv^2 :: CD^2 : CF^2$, & $Ix^2 : Cd^2$ est à la différence de $Ix^2 : Iy^2 :: Cd^2 : CF^2$,) comme la différence de qm^2 , & qv^2 à la différence de Ix^2 & Iy^2 . Donc $Pm^2 : Pm^2 - qm^2 + qv^2$, ou $Pv^2 :: Px^2 : Py^2$, E Pm : Pv :: Px : Py. Et parce que qv est à qm :: CA : CD, & Iy : Ix :: CP : Cd, enforte que $\frac{qv}{CA} : \frac{Iy}{CP} :: \frac{qm}{CD} : \frac{Ix}{Cd}$. & par conséquent :: Pm : Px, (ou par ce qui a été démontré,) comme Pv est à Py; il suit, que $\frac{qv}{Pv} : \frac{Iy}{Py} :: CA : CP$. Donc Cr : Cl :: CA : CP. Il suit, que les triangles Crv, Clp sont semblables, & Vv (ou 2rv) : Py (ou 2Pl) :: CA : CP. Mais Mm : Vv :: Pm : Pv, ou :: Px : Py. Donc Mm : Px :: Vv : Py, ou :: CA : CP. De-là, il suit que lorsque deux ellipses Pdp, ADB ont le même centre & foyer, si deux demi-diamètres CE & Ce, de ces ellipses, forment des angles pCE, pCe avec l'axe Cp, dont les sinus soient en même raison que CP à CA, ces demi-diamètres seront entre-eux comme CP à CA. Car, si CE & Ce sont respectivement parallèles à Px, & Pm, CE sera à Ce :: Px : Mm.

N. 22

649. Les ellipses Pdp, ADB, qui ont le même centre C, & le même foyer F étant supposées rouler autour de l'axe PCp, & produire des sphéroïdes de même densité, les pesanteurs en P, vers ces solides, seront en même raison que les quantités de matiere qu'ils contiennent, ou comme $Cd^2.CP$ à $CD^2.CA$. Car, soit une droite PmM qui rencontre l'ellipse intérieure en m & M, & le cercle CNH décrit du centre P en N, & que Px rencontre l'ellipse extérieure en x, & CNH en L; que mq, MQ, xI, NL & LZ soient perpendiculaires à Pp en

q , Q , I , R & Z respectivement; sur RN , prenez RK toujours égale à Qq , & sur ZL , prenez Zk toujours $= PI$, la pesanteur en P , vers le solide intérieur, sera à celle en P vers l'extérieur, comme l'aire produite par l'ordonnée RK à celle produite par Zk ; soit toujours $LZ : NR :: Cd : CD$, Mm fera toujours à Px , comme CA à CP , par le dernier article. Mais $Qq : Mm :: PR : PC$, & $PI : Px :: PZ : PC$, & la Fluxion de l'aire $CRKG$ est à celle de $CZkg$ en raison composée de Qq à PI , & de la Fluxion de R à celle de PZ , c'est-à-dire, en raison composée de Mm à Px , & de la Fluxion de PR^2 à celle de PZ^2 , (ou de la Fluxion de NR^2 à celle de LZ^2), & par conséquent en raison composée de CA à CP , & de CD^2 à Cd^2 , & les aires $CRKG$, $CZkg$ étant en même raison; il suit, que la pesanteur en P vers la portion du sphéroïde intérieur, qui est produite par le segment $AmMB$, est à celle en P , vers la portion de l'extérieur produite par le segment Pxp , comme $CA^2.CD^2$ est à $CP.Cd^2$, & que les pesanteurs en P , vers les solides entiers, sont en même raison; parce que Px , roulant autour de P , décrit la demi-ellipse Pdp , pendant que mM décrit ADB .

650. Ainsi la pesanteur vers le sphéroïde aplati $ADBE$, en chaque point P dans son axe prolongé au-delà de A , est mesurée par $\frac{2CA.CD^2}{CF^3}$, ($CF - CS$) PF étant supposée rencontrer l'arc CNH décrit du centre P en S ; parce que la pesanteur en P , vers le solide extérieur $Pdpe$, est mesurée par $\frac{2CP.Cd^2}{CF^3}$,

($CF - CS$) par l'article 646. laquelle est celle en P vers $ADBE :: CP.Cd^2 : CA.CD^2$, par le dernier article. De même la pesanteur en P , vers un sphéroïde allongé $ADBE$, est mesurée par $\frac{2CA.CD^2}{CF^3}$. LF , CL étant le logarithme de

Fig. 291
N. 2.

Fig. 292

la raison de Cd à PF , le module étant PC . Puisque la pesanteur en P vers un sphéroïde $ADBE$, qui a son centre en C & son foyer en F , & est décrit sur un axe AB qui n'est pas plus grand que Pp , est comme la quantité de matière dans ce sphéroïde; il suit, que si la densité du solide $Pdpe$ varie, mais en sorte qu'elle soit toujours la même sur la surface d'un tel sphéroïde $ADBE$, la pesanteur vers $Pdpe$ fera, en ce cas, à la pesanteur vers lui, lorsque sa densité est uniforme, comme la quantité de matière qu'il contient dans

Fig. 293.

le premier cas est à la quantité qu'il contient dans le second.

651. Soit maintenant P un point dans la circonférence de l'équateur du sphéroïde extérieur $adbe$; la pesanteur en P, vers le sphéroïde intérieur $ADBE$, fera à celle en P vers l'extérieur, comme $CA.CD^2$ est à $Ca.Cd^2$, ou comme les quantités de matière dans ces sphéroïdes, en supposant que les ellipses génératrices ont le même centre & foyer, comme dans l'article 649. Pour le démontrer, PC étant supposée perpendiculaire au plan méridien $adbe$, si elle rencontre D pE circonférence de l'équateur du solide intérieur en p ; & que les sections PZC , pVC , perpendiculaires au plan $adbe$, le coupent en CZ & CV , en sorte que Zr & VR , perpendiculaires à Cd , soient toujours en même raison de Ca à CA , les sections elliptiques PCZ , pCV auront la même excentricité, ou $CD^2 - CV^2$ fera $= Cd^2 - CZ^2$. Car, que rZ & RV prolongées, rencontrent les cercles dgh & DGH en g & G respectivement, $Cd^2 - CZ^2$ fera $= gZ$, $(Zr + gr)$, qui est à ha , $(aC + hC)$ ou $Cd^2 - Ca^2 :: Zr^2 : Ca^2$. De même, $CD^2 - CV^2 : CD^2 - Ca^2 :: VR^2 : CA^2$. Mais $Cd^2 - Ca^2 = CD^2 - CA^2$, (le foyer étant commun) & $Zr^2 : Ca^2 :: VR^2 : CA^2$, par la supposition. Donc $Cd^2 - CZ^2 = CD^2 - CV^2$. Que les sections PCZ , pCV se meuvent & deviennent PCz , pCv ; il suit, de ce qui a été démontré dans le dernier article, que la pesanteur en P, vers la tranche comprise par les plans PZC , PzC est finalement à la pesanteur en P vers la tranche, comprise par pVC & pvc en raison composée de $CZ^2.CP$ à $CV^2.Cp$, & de l'angle ZCz à VCv , ou (parce que les aires des secteurs sont en raison composée des carrés des rayons & des angles des secteurs,) comme $CZz.CP$ à $CVv.Cp$. Mais Zr étant toujours à VR , comme Ca est à CA , $Cr : CR :: Cd : CD$; l'aire $CaZr$ est à $CAVR$, & CaZ est à CAV , comme $Ca.Cd$ est à $CA.CD$, CZz est à CVv en même raison. Donc, la pesanteur en P, vers la tranche terminée par les plans PZC , & PzC , est à celle en P, vers la tranche terminée par pVC & pvc , en raison constante de $Cr.Cd$ à $CA.CD^2$, & la pesanteur en P, vers tout le solide extérieur, est à celle en P vers tout l'intérieur en même raison, ou comme la matière contenue dans le premier, est à celle contenue dans le second.

652. Ainsi pour mesurer la pesanteur vers un solide applati

ADBE d'une densité uniforme, à une distance CP dans le plan de son équateur prolongé, soit F le foyer d'une section du solide par son axe, décrivez du centre F, avec un rayon égal à la distance CP, un arc qui coupe l'axe en a , & du point a comme centre, décrivez, avec le même rayon, l'arc FO qui rencontre CB en O; la pesanteur en P vers le sphéroïde ADBE sera mesurée par $\frac{2CA.CD^2}{CF^3} \times \frac{FCO}{CP}$; parce que cette pesanteur est à celle en P vers le solide extérieur $adbe$, (qui est mesurée par $\frac{2Ca.Cd^2}{CF^3} \times \frac{FCO}{CP}$, par l'article 646.) comme CA.CD² est à Ca.Cd², par le dernier article. La pesanteur en P, vers ADBE, est à la pesanteur en a , vers le même, comme FCO à CP. (CF — CS) par l'article 650. Et si l'on suppose que la densité du sphéroïde $adbe$ varie depuis la surface au centre, mais en sorte qu'elle soit toujours la même aux différentes parties de la même surface, produite par une ellipse ADB, qui a toujours le même centre & le même foyer que adb , la pesanteur, à l'équateur du solide $adbe$, sera à celle au pôle a en même raison, que si la densité de ce sphéroïde étoit uniforme.

653. Le reste subsistant comme dans l'article 651. supposons que le solide ne soit pas un sphéroïde, ou que Cp soit plus grand ou moindre que CD; mais en sorte que la différence des carrés de Cp & CD soit égale à la différence des carrés de CP & Cd, afin que les sections DpC, dPc soient toujours des ellipses qui aient le même centre & foyer; & si nous supposons que les sections PCZ, pCV soient toujours des ellipses qui aient PC & CZ, pC & CV pour leurs axes respectifs, les distances de leurs foyers, au centre C, seront toujours égales comme auparavant, & l'on prouvera, de la même manière, que la pesanteur en P, vers le solide extérieur, est à la pesanteur en P vers l'intérieur, comme Ca.Cd.CP est à CA.CD.Cp.

654. Que x soit un point de la surface du sphéroïde de $adbe$, que l'on suppose produit par une ellipse, qui a le même centre & foyer, avec ADBE, comme auparavant; la pesanteur en x , vers le solide intérieur ADBE, sera à celle en x vers l'extérieur $adbe$, ou exactement, ou à fort peu près, lorsque les sphéroïdes diffèrent peu des sphères, comme CA.CD² est à

Ca. C d², ou comme la matiere contenue dans l'intérieur à celle contenue dans l'extérieur. Lorsque *x* est au pôle du sphéroïde, ou à la circonférence de l'équateur; cela se démontre par les articles 650 & 652. & dans les autres cas, on peut le conclure du dernier article. Mais nous allons appliquer ces Théorèmes aux recherches qui regardent le Système des Planètes.

Fig. 224.

655. La pesanteur au pôle *A*, vers un sphéroïde *ADBE*; étant représentée par *A*, & à l'équateur par *D*, la force centrifuge en *D* par *V*, comme ci-devant, si la densité du sphéroïde est uniforme, *D* est à *A*, comme l'aire du segment *FCO* est à *CD*. (*CF—CS*) par l'article 646. c'est-à-dire, (par la suite que l'on donne ordinairement pour mesurer les segmens & les arcs circulaires, & dont nous donnerons la preuve dans le second Livre,) *b*, *a* & *c* représentant *CD*, *CA* & *CF* respectivement, comme $1 + \frac{3c^2}{10b^2} + \frac{9c^4}{56b^4}$, &c. à $1 + \frac{2c^2}{5b^2} + \frac{8c^4}{35b^4}$, &c. Donc *Bb—Aa*, ou (article 641.) *Vb* est à *Db*, ou *V : D ::* $\frac{1c^2}{5b^2} + \frac{9c^4}{35b^4}$, &c. à $1 + \frac{3c^2}{10b^2} + \frac{9c^4}{56b^4}$, &c. & ainsi lorsque la raison de *c* à *b* est donnée, celle de *V* à *D* peut se déterminer au degré d'exactitude que l'on veut. Lorsque la raison de *V* à *D* est donnée, & que l'on demande celle de *c* à *b*, soit *V* à *D*, comme 1 à *m*, & *c²* à *b²*, comme *z* à 1. Alors $\frac{2z}{5} + \frac{9zz}{35}$, &c. sera à $1 + \frac{3z}{10} + \frac{9zz}{56}$, &c. comme 1 à *m*; d'où il suit (par les Méthodes du retour des suites) que $z = \frac{5}{2m} - \frac{15}{7mm}$, &c. on peut continuer cette suite à volonté. Mais lorsque le sphéroïde diffère peu de la sphere, *z* sera à fort peu près égal à $\frac{5}{2m + 1\frac{1}{2}}$, & *c²* à *b²* à fort peu près comme 5 *V* à 2 *D* + $\frac{12}{7}$ *V*. Donc, en ce cas, l'excès du demi-diamètre de l'équateur, par-dessus le demi-axe, est au demi-diamètre moyen, à fort peu près comme 5 *V* à 4 *D* — $\frac{11V}{7}$.

656. La raison de *z* à 1, ou de *cc* à *bb*, peut se découvrir en plusieurs manieres, sans avoir des observations faites à l'équateur du sphéroïde. Pour cela, nous employerons les deux propriétés suivantes de l'ellipse. Que *PK*, perpendiculaire à l'ellipse au point *P*, rencontre *CD* en *K*. Que le sinus & cosinus

de l'angle PKD , (qui est la latitude du lieu P) soient déterminés par S & K respectivement, le rayon étant l'unité. PK^2 fera à CA^2 , comme CA^2 à $CA^2 + CF^2.KK$, ou :: $CA^2 : CA^2 - CF^2.SS$. Car Pd étant perpendiculaire à CD en d , dK fera à dC , comme CA^2 à CD^2 , par l'article 627. & dC^2 étant à $CA^2 - Pd^2$, comme CD^2 est à CA^2 ; $dK^2 : CA^2 - Pd^2 :: CA^2 : CD^2$. Donc $CA^2 - PK^2 : dK^2 :: CF^2 : CA^2$, & puisque $dK^2 : PK^2 :: KK : CA^2 - PK^2 : PK^2 :: CF.KK : CA^2$, & $PK^2 : CA^2 :: CA^2 : CA^2 + CF^2.KK$, ou :: $CA^2 : CD^2 - CF^2.SS$.

657. Le rayon de courbure, en chaque point, est toujours en raison triplée de la perpendiculaire PK . Car que CG soit le demi-diamètre conjugué de CP ; puisque le rayon de courbure en P , est comme le cube de CG , par l'article 374. & que PK est en raison inverse de PZ perpendiculaire à CG en Z (article 627.) qui est en raison inverse de CG ; il suit que PK est comme CG , & que le rayon de courbure en P est comme le cube de PK . Ainsi le rayon, ou le degré sur le méridien, en chaque latitude P , est en raison triplée de PK , ou de la force avec laquelle un corps descend vers le sphéroïde en P , (par l'article 637.)

658. On détermine ordinairement la grandeur de la Terre; par celle d'un degré sur le méridien. Cela néanmoins ne nous donne que le rayon de courbure en ce lieu du méridien, ou le rayon d'une sphere qui auroit tous ces degrés égaux à ce degré; & la force centrifuge dérivée de là, & de la période de la révolution de la Terre sur son axe, est la force centrifuge à l'équateur d'une telle sphere, lorsqu'on la suppose rouler sur son axe en même tems que la Terre. Pour dériver la raison de cc à bb , dans le sphéroïde, par les observations faites en quelque latitude P , que g représente la force avec laquelle un corps est trouvé, par observation, descendre vers la Terre en P ; v la force centrifuge à l'équateur d'une sphere, qui a ses degrés égaux à celui que l'on suppose être mesurée en P , & qui roule sur son axe en même tems que le sphéroïde; & le rayon étant supposé $= 1$, que le sinus de la latitude de P soit S . CF^2 fera à CD^2 , ou cc à bb , à fort peu près, comme $5v$ à $2g - \frac{9v}{7} + 5SSv$.

Cár, que Po , rayon de courbure en P , rencontre CD en K ; que PK soit représentée par L , & la raison de g à v , par celle

de n à 1. Po (par le dernier article) est au rayon de courbure en A , ou $\frac{bb}{a}$, comme L^3 est à a^3 ; $V : v :: DC : Po$, les tems où le sphéroïde $ADB E$, & la sphere du rayon Po sont supposés rouler étant égaux; donc $V : v :: a^4 : b L^3$. Mais $g : A$ péfanteur au pôle :: $L : a$, par l'article 637. & $A : D - V :: b : a$, par l'article 641. Donc $g : D - V :: L b : a a$, & m , ou $\frac{D}{V} = \frac{a a g}{L b V} + 1$, ou $\frac{L L g}{a a v} + 1$, ou $\frac{n L L}{a a} + 1$, c'est-à-dire, (article 656.) $\frac{n a a}{b b - c c S S} + 1$. Donc $n + 1 - n z - S S : 1 - S S z :: m : 1$, ou (article 655.) $:: 1 + \frac{3z}{10} + \frac{9zz}{36}$, &c. $\frac{2z}{5} + \frac{9zz}{35}$, &c. D'où il suit que n étant un grand nombre, z approche fort d'être à l'unité, ou cc à $bb :: 1 : \frac{2n}{5} + \frac{1}{10} + S S + \frac{9nz}{35} + \frac{2nz}{5}$, ou (parce que z approche fort de $\frac{5}{2n}$) $:: 1 : \frac{2n}{5} + S S - \frac{9}{35}$, & par conséquent (n étant à 1, comme g est à v) comme $5v$ à $2g + 5SSv - \frac{9v}{7}$. Ainsi la raison de cc à bb est déterminée par la grandeur d'un degré mesuré sur le méridien en chaque latitude, & pour la longueur du pendule, qui fait ses vibrations dans un tems donné à la même latitude, (la terre étant supposée d'une densité uniforme) en calculant v , par la premiere, & g , par la seconde. R l'équateur, cette raison est celle de Sv à $2g - \frac{9v}{7}$; aux poles celle de $5v$ à $2g + \frac{26v}{7}$.

Fig. 293.

659. La raison de c^2 à b^2 peut aussi se découvrir, par ce qui a été démontré, en comparant la péfanteur d'un Satellite, qui roule autour du sphéroïde dans le plan de son équateur, avec la force centrifuge en D . Que Cd soit une distance dans le plan de l'équateur, & que Ca soit pris sur l'axe en sorte que $aF = Cd$; des centres a & A , décrivez les arcs FO & Fo qui rencontrent CB en O & o ; la péfanteur en d fera à celle en D , comme $FCO.CD$ à $FCo.Cd$, (par l'article 646.) ou en supposant que $\frac{Cd}{4}$ est représenté par d , en raison composée de b^2 à d^2 , & de $1 + \frac{3c^2}{10d^2} + \frac{9c^4}{56d^4}$, &c. à $1 + \frac{3c^2}{10b^2} + \frac{9c^4}{56b^4}$, &c. On voit par là que la péfanteur, vers un sphéroïde applati,

décroît, dans le plan de son équateur, en plus grande raison que le quarré de la distance du centre du sphéroïde ne croît. Ainsi les tems périodiques des Satellites de Jupiter doivent croître en plus grande proportion, que selon la loi de Kepler, où la raison ses quipliquée de leurs distances au centre de Jupiter; mais cette variation doit être à peine sensible, même dans les Satellites les plus proches. De même, la pèsanteur, vers un sphéroïde applati, décroît dans l'axe prolongé, en moindre raison que le quarré de la distance au centre ne croît. Car les droites aF & AF étant supposées rencontrer les arcs Cs & CS , décrits des centres a & A en s & S , la pèsanteur en a vers le sphéroïde de $ADBE$ fera à la pèsanteur en A , vers le même sphéroïde, comme $CF - Cs$ est à $CF - CS$, (article 650.) c'est-à-dire, Ca & CA étant représentées par e & a , en raison composée de a^2 à e^2 , & de $1 - \frac{3e^2}{5a^2} +$, &c. à $1 - \frac{3e^2}{5a^2}$, &c. On voit de même, que la pèsanteur, vers un sphéroïde allongé, décroît dans le plan de l'équateur en moindre raison, que celle dans laquelle les quarrés des distances au centre croissent, mais en plus grande raison dans l'axe prolongé au-delà du pole.

660. Soit N à 1 en raison composée du cube de Cd au cube de CD , & du quarré du tems où le sphéroïde roule autour de son axe au quarré du tems où un Satellite roule autour du sphéroïde, dans le plan de son équateur à la distance Cd ; & soit Cd à $CD :: M : 1$ cc fera à bb , à fort peu près, comme 5 à $2N + \frac{45}{14} - \frac{3}{2MM}$. Car, par le dernier article, la pèsanteur en d est à celle en D en raison composée de 1 à MM , & de $1 + \frac{3z}{10MM}$, &c. à $1 + \frac{3z}{10}$, &c. mais la pèsanteur en D est à V , comme $1 + \frac{3z}{10}$, &c. à $\frac{2z}{5} + \frac{9zz}{35}$, &c. Donc la pèsanteur en d est à V , ou $\frac{N}{MM}$ est à 1 , en raison composée de 1 à MM , & de $1 + \frac{3z}{10MM}$, &c. à $\frac{2z}{5} + \frac{9zz}{35}$. Donc $1 + \frac{3z}{10MM} = \frac{2Nz}{5} + \frac{9Nzz}{35}$, &c. D'où il suit, (par la Méthode de Newton, pour les réductions des équations affectées,) qu'en négligeant les termes de cette équation, qui renferment les plus hautes puissances de z , z est $= \frac{5}{2N} - \frac{225}{56NN} + \frac{15}{8MMNN}$, &c. ou z approche fort d'être à l'unité ou cc .

$bb :: 1 : \frac{2N}{5} + \frac{9}{14} - \frac{3}{10MM}$, & l'excès du demi-diamètre de l'équateur, par dessus le demi-axe, est au demi-diamètre du moyen, comme 5 à $4N + \frac{19}{7} - \frac{3}{MM}$ à fort peu près.

661. Pour appliquer ces Théorèmes à la terre, un degré du méridien vers la latitude de Paris est de 57060 toises, selon M. Picart; par conséquent si la Terre étoit une sphere parfaite, son rayon seroit de 19615783 pieds de France, & un corps à l'équateur d'une telle sphere décroît 1438.4 pieds dans une seconde de tems, par le mouvement diurne, dont le sinus verse est 7.510148 lignes. Mais puisqu'un pendule, qui fait à Paris ses vibrations dans une seconde, (par les observations faites, en dernier lieu, par M. de Mairan,) est de 440.57 lignes; & que l'espace décrit par un corps qui descend librement par sa pesanteur, dans un tems, est à la longueur du pendule, qui fait ses vibrations dans le même tems, en raison doublée du demi-cercle à son diamètre, (par l'article 405.) il suit que, dans cette latitude, un corps devoit parcourir, par sa pesanteur, environ 2172.9 dans une seconde, & que v est à g , (selon l'expression de l'art. 658.) comme 7.510148 est à 2172.9, ou :: 1 : 289.3. D'où il suit, par l'article 658. que cc est à $bb :: 1 : 116$, & que l'excès du demi-diamètre de l'équateur, sur le demi-axe, est environ $\frac{1}{231}$ du demi-diamètre moyen. Si le degré du méridien, auprès de Paris, est plus grand que 57060 toises, la raison de cet excès, au demi-diamètre moyen, sera plus grande presque en même raison; mais quoique ce degré soit de 57183 toises, (comme on dit qu'on l'a trouvé par les dernières observations,) cet excès ne sera pas au-dessus de $\frac{1}{230}$ du demi-diamètre moyen. Par les mesures & observations que les Membres de l'Académie Royale des Sciences de Paris, ont faites auprès du cercle polaire, v y est à $g :: 1 : 287.8$, comme il paroît, en comparant, de la même maniere, le degré qu'ils ont mesuré avec la longueur du pendule, qui, par leurs observations, faisoit ses vibrations à Pello dans une seconde. D'où il résulte: $cc : bb :: 1 : 115.9$, & presque le même excès du demi-diamètre de l'équateur sur le demi-axe, qui résultoit des observations faites à Paris. On peut de même déterminer cette raison par la distance, & le tems périodique de la Lune, comparé avec celui de la révolution de la Terre sur son axe, en trouvant, par ce moyen, la

raison

raison de N à 1, selon l'article 660. Par ce calcul, la différence des demi-diamètres de la Terre approche fort de la même que ci-devant. Et tout cela s'approche des calculs de Newton, qui prétend que le demi-diamètre de l'équateur est au demi-axe, comme 230 est à 229.

662. Mais en supposant que la Terre est un sphéroïde, selon ce qui a été démontré ci-devant, & que sa densité est uniforme depuis la surface au centre; si nous calculons la différence de ces demi-diamètres de la Terre, par les longueurs de pendules qui ont été trouvés faire leurs vibrations en tems égaux, en différentes latitudes; ou par l'augmentation du degré du méridien, depuis Paris jusques au cercle polaire, comme on l'a déterminé en dernier lieu; la différence de ces demi-diamètres se trouvera beaucoup plus grande que $\frac{1}{231}$, du demi-diamètre moyen. Que L & l expriment les longueurs de deux tels pendules aux lieux P & p, & que le rayon étant l'unité, S & s représentent les sinus respectifs des latitudes de P & p, (c'est-à-dire, des angles PKD, pKD,) cc fera à bb :: LL — ll : LLSS — llss. Car, PK² : pK² :: 1 — $\frac{ccss}{b^2}$: 1 — $\frac{ccSS}{b^2}$, par l'article 656. L'espace, décrit dans un tems donné, par un corps qui descend librement, est comme la pesanteur; & il suit, de l'article 408. que la longueur d'un pendule, qui fait ses vibrations dans un tems donné, est aussi comme la pesanteur. Donc LL : ll :: PK² : pK², par l'article 647. ou :: 1 — $\frac{ccss}{bb}$: 1 — $\frac{ccSS}{bb}$. Donc cc : bb :: LLSS — llss. Donc, si L : l :: 1 + u : 1 — u, cc fera à bb à fort peu près :: 4u : SS — ss + 2uSS + 2uss.

663. Si un degré, sur le méridien en P, est à un degré en p, comme G est à g, cc fera à bb :: G^{2/3} — g^{2/3} : G^{2/3}SS — g^{2/3}ss : parce que G est à g, comme le rayon de courbure en P au rayon de courbure en p, c'est-à-dire :: PK³ : pK³, par l'art. 657. d'où il suit que G^{2/3} : g^{2/3} :: 1 — $\frac{ccss}{bb}$: 1 — $\frac{ccSS}{bb}$, & cc : bb :: G^{2/3} — g^{2/3}SS — g^{2/3}ss. Cette règle, pour trouver la raison de cc à bb, (par où celle de bb — cc, ou aa à bb se calcule aisément,) est exacte, & n'est fondée sur aucune théorie particulière de la pesanteur, mais uniquement sur la supposition que la Terre est un sphéroïde. Lorsque le sphéroïde diffère peu d'une sphere, soit le degré en P au degré en p,

comme $1+x$ à $1-x$, cc fera à bb à fort peu près comme $\frac{4x}{3}$ à $SS + ss - \frac{2SSx}{3} + \frac{2ssx}{3}$.

664. Par exemple, la longueur du pendule, qui fait ses vibrations, dans une seconde, à Pello, latitude $66^{\circ} 48'$ est 441.17, par l'observation de M. de Maupertuis, (*Fig. de la Terre*, Liv. III. Chap. 6. §. 6.) Le pendule, qui fait ses vibrations, dans le même tems, à Paris, latitude $48^{\circ} 50'. 10''$, est 440.57 lignes. Soit donc L à l :: 441.17 : 440.57, ou :: $1 + \frac{30}{44087} : 1 - \frac{30}{44087}$, & calculant par l'une ou l'autre des regles de l'article 663. cc fera à bb , comme 1 à 102.8. En comparant, de la même maniere, les observations faites dans la Jamaïque, par Colin Campbell, (*Phil. Transf. N.* 432.) & à Londres, par M. Graham, cc est à bb , comme 1 à 95. & en calculant sur quelques autres observations de cette espece, (*Mémoires de l'Académie.* 1735.) cette raison se trouve encore plus grande, & elle doit être celle de 1 à 116, si la terre est d'une densité uniforme, par l'article 660.

665. Le degré, qui coupe le cercle polaire, a été trouvé de 57438 toises, & le milieu de cet arc étoit dans la latitude $66^{\circ} 19'. 34''$. Le degré mesuré, par M. Picart, ayant égard à la correction faite en dernier lieu, par M. de Maupertuis, est de 57183. toises, & le milieu de cet arc est dans la latitude $49^{\circ} 21'. 24''$. Supposons donc $G : g :: 57438 : 57183$, ou :: $1 + \frac{1275}{573105} : 1 - \frac{1275}{573105}$, & par les regles de l'article 663. cc : $bb :: 1 : 89\frac{1}{3}$. Donc $b : a$, ou le demi-diamètre de l'équateur au demi-axe, :: $89\frac{1}{3} : 88\frac{1}{3}$, ou à fort peu près :: $178\frac{1}{3} : 177\frac{1}{3}$, & par conséquent la différence de ces demi-diamètres est d'environ vingt-deux milles, qui devroit être seulement de dix-sept milles, si la densité de la Terre étoit uniforme. Cette différence feroit beaucoup plus grande, si l'on n'avoit pas égard à la correction de l'arc de M. Picart.

666. Par ces observations, il y a lieu de croire que la variation de densité, des parties intérieures de la Terre, est considérable; & pour être en état de former quelque jugement sur cette matiere, il est bon d'examiner quelles proportions des demi-diamètres DC & AC , & de la pesanteur en A à celle en D résultent, lorsque la densité est supposée croître ou décroître vers le centre; ou même lorsque la Terre est supposée être une croûte avec un noyau en-dedans, selon l'hypothese ingé-

nieuse, avancée il y a quelque tems, par le Docteur Halley. Si la densité étoit uniforme, l'augmentation de gravitation (par laquelle nous entendrons avec M. de Maupertuis, ce qui suit la force avec quoi un corps tend actuellement embas, ou l'excès de la pesanteur sur la force centrifuge,) depuis l'équateur aux poles, doit être en même proportion à la gravitation moyenne, que la différence des demi-diamètres DC & AC, au demi-diamètre moyen; parce que $A : D - V :: DC : AC$, par l'article 641. & l'excès de A sur $D - V$ est à leur demi-somme $:: DC - AC :: \frac{1}{2} AA + \frac{1}{2} DC$. Si nous supposons maintenant qu'une nouvelle matiere est ajoutée au centre, ou que la densité y est augmentée, l'attraction de cette nouvelle matiere, ajoutera plus à la pesanteur au pole qu'à l'équateur, la distance étant moindre, & l'on en doit conclure une plus grande augmentation de gravitation, depuis D vers A, qu'il n'en résulte de l'hypothese d'une densité uniforme, comme Newton l'a fort bien observé. Mais on n'en doit pas conclure une plus grande différence des demi-diamètres DC & AC. En supposant les colonnes fluides, (à la maniere de Newton) & qu'elles se font soutenues mutuellement, avant qu'on eût ajouté une nouvelle matiere au centre, l'attraction de cette nouvelle matiere, ajoutera plus à la pesanteur de la nouvelle colonne DC qu'à celle de CA; & quoique nous supposions que la force centrifuge en D est augmentée jusques à ce qu'elle soit en même raison à même raison à toute la pesanteur en D qu'auparavant, la colonne CD fera plus qu'un contre-poids pour CA, jusques à ce que CD & CA s'approchent plus de l'égalité, & que la figure approche plus d'une sphere. Car, que d représente l'augmentation de la pesanteur en D, par l'attraction de cette nouvelle matiere, N l'augmentation de gravitation de la colonne AC, résultante de cette même attraction, & que v représente l'incrément de la force centrifuge en D; que $v : d :: V : D$, afin que la raison de 1 à m (ou de $V + v$ à $D + d$) reste la même qu'auparavant. Alors $\frac{Aa}{2} + N$ représentera toute la gravitation de la colonne AC, $\frac{(D-V)b}{2} + N + (b-a) - \frac{vb}{2}$ la gravitation de DC; mais $\frac{1}{2} Aa$ est supposée $= \frac{1}{2} b (D - V)$ & $\frac{vb}{2}$ étant $= \frac{dVb}{2D}$, ou ($c^2 : b^2 :: 5V : 2D$ à fort peu près, par l'article 655.) $\frac{dc^2}{5b}$, qui est moindre que $d, (b - a)$

ou $\frac{dc^2}{b+a}$, en raison de 2 à 5 à fort peu près. Il suit, que la gravitation de DC est maintenant plus grande que celle de AC; enforte que ces colonnes ne peuvent pas se balancer l'une & l'autre, à moins que le fluide ne s'abaisse en D, & ne s'élève en A. Si la nouvelle matiere est en forme d'une sphere autour du centre C, on fait voir, de la même maniere, que la colonne AC ne balancera pas DC, & l'on démontrera la même chose dans la suite, pour le cas où la nouvelle matiere est supposée formée en sphéroïde semblable & concentrique à ADBE.

667. D'un autre côté, si l'on suppose que la densité est moindre au centre, ou que l'on en a enlevé quelque matiere, la colonne DC ne balancera pas plus long-tems AC, & le fluide, dans le canal ACD, ne sera en équilibre, que lorsqu'il sera élevé en D, & abaissée en A; c'est-à-dire, lorsque la figure s'écartera plus de la sphere, que dans le cas où la densité étoit supposée uniforme. Car, en supposant que d représente le décrement de la pesanteur en D, en conséquence de la raréfaction de la matiere au centre & que N représente le décrement de la pesanteur de toute la colonne AC; soit v décrement de la force centrifuge, tel $V-v : D-d :: V : D \cdot \frac{Aa}{2} - N$ représentera la gravitation de la colonne AC & $\frac{D-V+v}{2} b - N - d(b-a)$ la gravitation de DC. Mais $\frac{vb}{2}$ étant moindre que $d(b-a)$ comme dans le dernier article, & $\frac{Aa}{2} = \frac{D-V}{2} b$, parce que les colonnes étant supposées se soutenir mutuellement avant que la matiere fût enlevée du centre; il est clair que la colonne AC est maintenant plus forte qu'un contre-poids de DC. Ainsi la raréfaction de la matiere au centre produira une plus grande différence des demi-diamètres DC & AC, ou une plus grande variation de la figure sphérique, que l'hypothese d'une densité uniforme. Mais elle ne produira pas une plus grande augmentation de gravitation depuis l'équateur aux poles, au contraire l'augmentation de gravitation sera moindre, en ce cas, qu'en supposant la densité uniforme. Car, puisque $A-D+V : A+D-V :: b-a : b+a$, c'est-à-dire, comme 5 à 8 *m* à fort peu près, par l'article 655. l'augmentation de la gravitation, depuis l'équateur aux poles, est à la pesanteur moyenne, (que nous appellerons G ,) à fort peu près, comme 5 est

à $4m$, lorsque la densité du sphéroïde est uniforme. Mais lorsque la matière autour du centre est supposée raréfiée comme ci-devant, soit d à $G :: 1 : r$ la pesanteur en A étant $A - \frac{db^2}{a^2}$, & la gravitation en D égale à $D - d - V + v$, dont la différence est à leur demi-somme, comme $A - D - \frac{db^2}{a^2} + V - v$ à $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}D - \frac{db^2 + da^2}{2a^2} - \frac{1}{2}V + \frac{1}{2}v$. Il suit, (parce $A - D + V : 2G :: b - a : b + a$, ou $:: 5 : 8m, c^2 : a^2 :: 5 : 2m$, & $v : G :: 1 : rm$ à fort peu près,) que l'augmentation de gravitation depuis l'équateur aux poles sera, en ce cas, à la gravitation moyenne, à fort peu près, comme $5r - 14 : 4mr - 4m + 2$, ou $:: 5 - \frac{2}{r-1} : 4m + \frac{2}{r-1}$, qui est en moindre raison que celle de 5 à $4m$. Et si nous supposons que le fluide s'élève en D , & s'abaisse en A jusques à ce que les colonnes AC & DC se soutiennent mutuellement, l'augmentation de gravitation de D en A , sera, en ce cas, à la moyenne gravitation, en moindre raison qu'auparavant. Donc l'hypothese d'une plus grande densité, vers le centre, peut donner une plus grande augmentation de gravitation, depuis l'équateur aux poles, que celle d'une densité uniforme, mais non pas une plus grande augmentation des degrés du méridien : & l'hypothese d'une moindre densité, vers le centre, peut donner une plus grande augmentation des degrés du méridien, mais non pas une plus grande augmentation de gravitation, supposant toujours (d'après Newton) que les colonnes DC & AC s'étendent de la surface au centre, & s'y soutiennent mutuellement. Tel est aussi le résultat de nos calculs, (dont nous donnerons ici quelques-uns) dans lesquels nous avons supposé que la densité croît, ou décroît continuellement, depuis la surface du sphéroïde $ADBE$ jusques au centre, enforte qu'elle soit uniforme dans les différentes parties de chacune des surfaces elliptiques concentriques & semblables, & dans plusieurs autres cas. Et de-là, il paroît qu'il y a lieu de proposer la question, si la constitution intérieure des parties de la Terre, ci-dessus mentionnée, telle qu'elle a été proposée par le Docteur Halley, pour résoudre quelques-uns des phénomènes de l'aiguille aimantée, ne se trouvera pas donner avec probabilité l'augmentation de gravitation, & en même tems celle des degrés du méridien, depuis l'équateur aux poles,

telles qu'elles ont été déterminées jusqu'à présent, par les meilleures observations. On verra mieux, par ce qui suit, sur quoi est fondée cette question.

Fig. 295.

668. Soit $ADBE$ une section d'un sphéroïde par son axe AB ; F le foyer, & FO un arc du centre A , comme ci-devant, & qui rencontre CB en O ; soit $adbe$ une ellipse semblable concentrique, f son foyer, fZ une parallèle à l'axe qui rencontre l'arc FO en Z , & ZV une perpendiculaire à l'axe en V . Je suppose que la densité soit toujours la même sur la surface produite par une ellipse adb autour de son axe AC , quelque variable qu'elle soit en différentes surfaces elliptiques, & que e représente la densité dans la surface $adbe$. Si l'on prend VK sur VZ , en même raison à VZ , que e est à CD , & que l'ordonnée VK produise l'aire $OKHC$, la pesanteur en D vers tout le sphéroïde $ADBE$ sera mesurée par $\frac{2CD^2 \cdot CA}{CF^3} \times OKHC$. Car, que $lmnr$ soit une autre ellipse semblable & concentrique, x son foyer; que xz , parallèle à AB , rencontre FO en z ; que zv soit perpendiculaire à AB en v , par l'article 652. la pesanteur en D , vers le solide produit par l'espace annulaire terminé par adb & lmn roulant autour de l'axe AB , avec la densité e , sera mesurée par $\frac{2CD^2 \cdot CA \cdot e}{CF^3} \cdot \frac{CD \cdot vz}{CD}$; ce que lorsque al est continuellement diminuée devient à la fin $= \frac{2CD^2 \cdot CA \cdot e}{CF^3} \cdot \frac{ZV \cdot Vv}{CD}$, ou, (par la supposition) à $\frac{2CD^2 \cdot CA}{CF^3}$. Par conséquent la pesanteur en D vers tout le sphéroïde $ADBE$ est mesurée par $\frac{2CD^2 \cdot CA}{CF^3} \cdot OKHC$, & elle est à la pesanteur en D vers le sphéroïde $ADBE$, lorsque la densité est supposée uniforme, & représentée par E , comme $OKHC \cdot CD$ à $FCO \cdot E$. Par exemple, si la densité, dans le rayon CD en chaque point d , est réciproquement comme Cd distance au centre, la pesanteur en D , vers un sphéroïde, sera à la pesanteur en D , vers un sphéroïde d'une densité uniforme, égale à celle du premier en D , comme $CF \cdot CO$ à l'aire FCO ; parce que si E représente la densité en D , VK est à E , comme VZ (ou Cf) est à Cd , ou comme CF est à CD , & l'aire $OKAC \cdot CD = E \cdot DF \cdot CO$. En ce cas, la pesanteur est la même dans toutes les parties de la colonne DC . De même, lorsque la den-

sité en d est réciproquement comme le quarré de la distance Cd , la pésanteur en D , vers un tel sphéroïde, est à la sphéroïde, est à la pésanteur en D vers le même, lorsque sa densité est uniforme, & égale à celle du premier en D , comme $CF^2.CO$ est à $FCO.CD$, & la pésanteur en chaque point d , de la colonne CD , est réciproquement comme la distance Cd .

669. De même, que fk , perpendiculaire à CD en f , foyer de $adbe$, soit à e , comme $Cf^2 : Af^2$, & que l'ordonnée fk produise l'aire $CkoF$, la pésanteur en A , vers le sphéroïde $ADBE$ sera mesurée par $\frac{2CD^2.CA}{CF^3}.CkoF$. Ce qui se démontre de même, par l'article 650. la pésanteur, vers un tel sphéroïde en chaque point de son axe, ou dans le plan de son équateur, prolongé au-delà du solide, peut se déterminer de la même manière.

670. Supposons, par exemple, que la densité dans chaque demi-diamètre est comme la distance de C , & celle à la surface étant représentée par E , on aura $e : E :: Cd : CD$, & $VK : VZ :: E.Cd : CD^2$, ou (parce que $Cd : CD :: VZ : CF$) $:: E.VZ : CD.CF$; & $VK : E :: VZ^2$, ou $AO^2 - AV^2 : CD.CF$. Donc, si AM , perpendiculaire à AO , est à AO , ou $CD :: E : CF$, & si l'on décrit une parabole sur l'axe MA , qui ait son sommet en M & passe par O , OKH sera une portion de cette parabole, & l'aire $OKHC$ se trouvera $= E \times \frac{2CD^2.CO - CD^3 + CA^3}{3CD.CF}$, ou (selon les expressions de l'article 655.) $= \frac{E.c^3}{3b} \cdot \frac{2b+a}{(b+a^2)}$. Donc la pésanteur en D , vers un tel sphéroïde, sera mesurée par $\frac{2baE}{3} \cdot \frac{2b+a}{(b+a^2)}$. Celle en d est à celle en D , en raison composée de Cd à CD , & de la densité en d à la densité en D , & par conséquent comme Cd^2 est à CD^2 . Donc, si la pésanteur en D est représentée par Q , & Cd par z , la pésanteur en d sera représentée par $\frac{Qz^2}{d^2}$, la densité en d par $\frac{Ez}{b}$, & la pésanteur de la colonne DC sera mesurée par une aire sur la base CD , qui a son ordonnée en chaque point d égale $\frac{QEz^3}{b^3}$, & cette

aire est $= \frac{1}{4} Q E b$. Chaque distance dans le plan de l'équateur, comme Cp plus grande que CD étant représentée par d , & $\sqrt{d^2 - C^2}$ par a , la pesanteur en p sera mesurée par $\frac{2b^2 a E}{3d} \cdot \frac{2d+a}{(d+a)^2}$; comme on peut le démontrer de la même manière.

671. Dans le même sphéroïde, si l'on prend fk à E , comme Cf^3 à Af^2 . CF , & si L marque le logarithme de la raison de CD à AC , le module étant AC , l'aire $CkoF$ sera $= \frac{E}{2CF} \times (CF^2 - 2AC.L)$; & la pesanteur en A , vers le sphéroïde, sera mesurée par $\frac{b^2 a E}{C^4}$, ($c^2 - 2aL$) la pesanteur en a vers ce sphéroïde sera à celle en A en raison composée de la densité en a à la densité en A , & de Ca^2 à CA^2 . Donc, si q marque la pesanteur en A , & que u représente Ca , la pesanteur en a sera $\frac{qu^2}{a^2}$, la densité en a sera $\frac{Eu}{a}$. Par conséquent la pesanteur de la colonne AC sera mesurée par $\frac{1}{4} q E a$.

672. Que V représente la force centrifuge en D , résultante de la révolution du sphéroïde sur son axe, la force centrifuge en d sera $\frac{Vz}{b}$, & la densité en d étant $\frac{Ez}{b}$, la quantité qui doit être soustraite de la pesanteur de la colonne DC , à cet égard, sera mesurée par une aire sur la base CD , dont l'ordonnée, en chaque point d , est $\frac{VEz z}{bb}$, & cette aire étant égale à $\frac{1}{3} VEb$, la gravitation de la colonne DC sera $\frac{1}{4} E b Q - \frac{1}{3} E b V$, ou (supposant $V : Q$ pesanteur en $D :: 1 : m$, comme ci-devant,) $E b Q \left(\frac{3m-4}{12m} \right)$.

673. Si nous supposons maintenant (à la manière de Newton) que les colonnes DC & AC sont fluides, & se soutiennent mutuellement en C , nous aurons $b Q \left(\frac{3m-4}{12m} \right) = \frac{aq}{4}$, ou $b : a :: q : Q \left(\frac{3m-4}{3m} \right)$. Mais lorsque le sphéroïde diffère peu de la sphere, on doit regarder q comme $= Q$. Car, par les articles 670 & 671. (supposant $CD = 1+x$, $CA = 1-x$), $Q : q :: \frac{2}{3} \left(\frac{2b+a}{(b+a)^2} \right)$, ou $\frac{1}{2} + \frac{x}{6} : \frac{b}{c^4}$, ($c^2 - 2aL$), & ce dernier terme étant, de même, exprimé par x , on ne trouvera de termes différens, que ceux qui renferment les secondes, & plus hautes puissances de x . Donc $b : a :: 3m : 3m - 4$ approchant,

prochant, & $b - a : b :: 4 : 3m$, c'est-à-dire, $:: 4V : 3Q$. Et en ce cas, l'excès du demi-diamètre de l'équateur, sur le demi-axe, est plus grand que lorsque la densité est supposée uniforme en raison de 16 à 15, la raison de V à Q étant supposée la même que l'étoit auparavant celle de V à D . Soit $Q : V :: 289 : 1$, comme dans la Terre, $CD - CA$ fera à $CD :: 4 : 3 \times 289$, ou $:: 1 : 216\frac{3}{4}$. Donc $CD : CA :: 216\frac{3}{4} : 215\frac{3}{4}$. Donc cette hypothèse, d'une densité qui décroît comme la distance au centre décroît, doit produire un plus grand excès du demi-diamètre de l'équateur sur le demi-axe, que celle qui résulte de la supposition d'une densité uniforme; mais elle ne doit pas produire une plus grande augmentation de gravitation, depuis l'équateur aux poles. Car, puisque les valeurs de Q & q se confondent presque en ce cas, il suit que la gravitation à l'équateur est à la pesanteur au pôle, comme $Q - V$ est à Q , ou comme $m - 1$ est à m , c'est-à-dire, $:: 288 : 289$, au lieu que dans l'hypothèse d'une densité uniforme, cette raison étoit celle de 230 à 231. De même, en supposant que la densité décroît comme le cube de la distance à C , la raison de DC à AC se trouvera approcher de celle de 226 à 225, mais l'augmentation de la gravitation sera moindre que dans la première hypothèse.

674. Il est aisé, par ce qui a été démontré, de mesurer la pesanteur en D & A vers un sphéroïde, lorsque les épaisseurs, depuis la surface, étant supposées croître uniformément, la densité croît, de même, uniformément, jusques à ce qu'au centre elle devienne un multiple, de ce qu'elle est à la surface, & de déterminer la force de l'ellipse $ADBE$. Soit pris L sur CD prolongée en-haut, enforte que CL soit à LD , comme un nombre n est à 1, & supposons que la densité, en chaque point d , soit toujours comme Ld . Que e marque la densité à la surface, ne représentera celle au centre. En ce cas, nous pouvons concevoir la densité du sphéroïde en chaque orbe $adbe$, comme la différence des densités d'un sphéroïde, d'une densité uniforme ne , & d'un autre sphéroïde, qui a la densité à sa surface $= (n - 1)e$, & sa densité décroissant embas, en même proportion que la distance depuis C , comme dans les articles précédens; parce la différence de ces densités, en chaque point d , sera égale à $ne - (n - 1) \frac{Cd}{CD} e$, ou $\frac{LC - Cd}{LD} e$, ou $\frac{Ld}{LD} \cdot e$ qui représente la densité en d du sphéroïde $ADBE$;

que nous examinerons. Par conséquent la pesanteur, en chaque point vers ce sphéroïde A D B E, est égale à la différence des pesanteurs vers ces deux sphéroïdes au même point. Donc, si P marque la pesanteur en D vers un sphéroïde, d'une densité uniforme représentée par ne , & si Q marque la pesanteur en D vers le sphéroïde, dont la densité en D est $(n-1)e$, & qui est en chaque autre point d , comme C d ; alors $P - Q$ marquera la pesanteur en D vers le sphéroïde A D B E, & (b & z représentant C D & C d , comme ci-devant,) $\frac{Pz}{b} - \frac{Qz^2}{b}$ la pesanteur en d vers ce sphéroïde. La densité en d est représentée par $ne - (n-1)\frac{ze}{b}$. Par conséquent la pesanteur de la colonne CD sera mesurée par une aire, sur une base CD, dont l'ordonnée en d est égale à $(\frac{Pz}{b} - \frac{Qz^2}{bc}) \times (ne - (n-1)\frac{ze}{b})$, c'est-à-dire, par $\frac{eb}{6} \times ((n+2)P - \frac{(n+3)}{2}Q)$. La valeur de P est $\frac{2b^2a}{C^3} ne - \frac{FCO}{b}$, par l'article 646. & la valeur de Q est $2bae \frac{(n-1)}{3} (\frac{2b+a}{(b+a^2)})$, par l'article 670. Si l'on veut déterminer la pesanteur vers ce sphéroïde, en chaque point p , dans le plan de son équateur prolongé, il faut décrire du centre F, avec un rayon égal à Cp, un arc qui coupe l'axe en p , & l'arc Fo, avec le même rayon du centre p , qui coupe l'axe en o ; & la pesanteur en p , vers le sphéroïde A D B E sera mesurée par $\frac{2CD^2.CA}{CF^3} \cdot \frac{FCO}{Cp} ne - \frac{2DC^2.CA}{3Cp} \times \frac{2Cp+Cp}{(Cp+Cp)^2} \times (n-1)e$.

675. La force centrifuge en D étant représentée par V, celle en d sera $\frac{Vz}{b}$, & la densité en d étant $ne - (n-1)\frac{ze}{b}$, la quantité qu'il faut soustraire de la gravitation de la colonne DC, eu égard à la force centrifuge, sera mesurée par une aire sur la base DC, dont l'ordonnée en d est toujours égale à $\frac{neVz}{b} - (n-1)\frac{eVzz}{bb}$, & cette aire est $ebV\frac{n+2}{6}$ (ou supposant que la raison de la force centrifuge V à $P - Q$, pesanteur en D, est représentée par celle de 1 à m ,) $eb\frac{P-Q}{m} \cdot \frac{n+2}{6}$. Donc la gravitation de la colonne DC, en retran-

chant cette quantité, se réduit à $e b P \frac{n+2}{6} \cdot \frac{m-1}{m} - \frac{e b Q}{6}$
 $\left(\frac{n+3}{2} - \frac{n+2}{m} \right)$.

676. Que p marque la pèsanteur au pole A vers un sphéroïde d'une densité uniforme, représentée par ne , & q la pèsanteur en A vers un autre sphéroïde, dont la densité, dans chaque colonne AC, est comme la distance depuis C; alors $p - q$ marquera la pèsanteur en A vers le sphéroïde ADBE, (dont la densité en chaque orbe $adbe$ est supposée être comme Ld) & en procédant, comme dans l'article 674. on trouvera que la pèsanteur de la colonne AC est mesurée par $\frac{ea}{6} \left((n+2) p - \frac{(n+3)}{2} q \right)$. La valeur de p est $\frac{2b^2a}{c^3} (CF - CS) ne$; & celle de q est $b^2ae \cdot \frac{n-1}{c^4} (C^2 - 2aL)$ par l'article 671.

677. La supposition de l'équilibre des colonnes DC & AC nous donne $bP \cdot \frac{m-1}{m} - bQ \left(\frac{n+3}{2n+4} - \frac{1}{m} \right) = ap - aq$.
 $\frac{n+3}{2n+4}$, ou N étant supposé $= \frac{n+3}{2n+3}$, $bP \cdot \frac{m-1}{m} - bQ \left(\frac{Nm-1}{m} \right) = ap - Naq$; & $b : a :: p - Nq : \frac{m-1}{m} \cdot P - Q \cdot \frac{Nm-1}{m}$, en sorte que $b - a : b + a$ (ou supposant $b = 1+x$, & $a = 1-x$) $x : 1 :: p - P \frac{m-1}{m} - Q \frac{Nm-1}{m} : p + P - 2NQ$ approchant; parce que Q & q peuvent être regardés comme égaux, par ce qui a été observé dans l'art. 673. & que m est supposé être un grand nombre. De-là, il suit (en substituant à p , P & Q leurs valeurs tirées des articles 674 & 676. & négligeant les termes où l'exposant de x est plus grand que l'unité, & où x est divisé par m ,) que $\frac{16nx}{5} - (n-1)x = \frac{n+3}{6m}$, & (substituant pour N sa valeur $\frac{n+3}{2n+4}$; $x = \frac{5}{m} \frac{(n+2)n+3}{17n+34n+45}$. On trouve la même valeur de x , lorsque n est une fraction, c'est-à-dire, en prenant l sur CE, lorsque la densité au centre est moindre que la densité en D, en raison de lC à lD , & que la densité, en chaque point d , est comme ld . Selon que n est plus grand, ou moindre que l'unité, x est moindre, ou plus grand que $\frac{5}{8m}$; car $x = \frac{5}{8m} - \frac{15}{8m}$

$\left(\frac{3n+1 \cdot n-1}{17nn+34n+45} \right)$. Donc, la raison de la force centrifuge en D à la pesanteur étant donnée, on trouve que le sphéroïde diffère moins d'une sphere, lorsque la densité croît vers le centre; de la maniere que nous l'avons décrit ci-devant, que lorsqu'elle est supposée uniforme; mais qu'elle s'écarte plus de la sphere, lorsque la densité décroît vers le centre.

678. L'augmentation de gravitation, depuis l'équateur au pôle, est à la gravitation moyenne, comme $p - \frac{m-1}{m} P - \frac{Q}{m}$ à $\frac{1}{2} P + \frac{1}{2} p - Q + \frac{P-Q}{2m}$; c'est-à-dire, en raison composée de 1 à m , & de $25 \times (n+1)^2 + 20$ à $17(n+1)^2 + 28$, ou en raison composée de 5 à $4m$, & de $1 + 3 \left(\frac{n+3 \cdot n-1}{17nn+34n+28} \right)$ à 1. Donc l'augmentation de gravitation, depuis l'équateur aux pòles, est à la gravitation moyenne, en plus grande, ou moindre raison que celle de 5 à $4m$, (qui est la raison lorsque la densité est uniforme) selon que n est plus grand, ou moindre que l'unité; c'est-à-dire, selon que la densité croît, ou décroît vers le centre. Et il suit de là, & du dernier article, qu'une supposition, de cette espece, ne peut pas produire une plus grande variation de la figure sphérique, & en même tems un plus grand accroissement de gravitation, depuis l'équateur aux pòles, que l'hypothese d'une densité uniforme; si les colonnes AC & DC sont supposées s'étendre de la surface au centre, & sont supposées se balancer l'une & l'autre en C.

679. Pour en venir à quelques exemples; si la densité au centre, est double de celle de la surface, ou $n = 2$, l'excès de DC sur AC sera au demi-diamètre moyen, comme 200 à 181*m*, par conséquent dans la Terre (m étant = 289) le demi-diamètre de l'équateur sera au demi-axe comme 262 à 261; & la gravitation à l'équateur à celle aux pòles, comme 213 à 214. Si $n = 3$, la différence de CD & CA sera au demi-diamètre moyen, comme 1 à m , & dans la Terre le demi-diamètre de l'équateur au demi-axe, comme 289 à 288; auquel cas la gravitation à l'équateur est à celle aux pòles, comme 206 à 207. Si la densité est comme la distance au-dessous de la surface, ou si le point L se confond avec D, la différence de CD & AC sera au demi-diamètre, comme 10 à 17*m*. Dans

la Terre DC est à AC comme 492 à 491, & la gravitation en D est à la gravitation en A, comme 196 à 197.

680. Supposons que la densité soit uniforme, depuis la surface ADBE jusques à l'orbe semblable concentrique *adbe*, qu'elle soit aussi uniforme, depuis *adbe* jusques au centre, & que la densité, en-dedans de l'orbe *adbe*, soit à celle en-dehors, comme $1 + e$ est à 1. En ce cas, l'augmentation de gravitation de D vers A sera plus grande que dans l'hypothèse d'une densité uniforme; mais en supposant que les colonnes AC & DC se soutiennent mutuellement en C, & que DC soit à dC, comme n à 1, l'excès du demi-diamètre de l'équateur sur le demi-axe sera au demi-diamètre moyen à fort peu près en raison composée de 5 à $4m$, & de $n^5 + en^3 + en^2 + e^2$ à $n^5 + en^3 + en^2 + e en^3 + 3e \frac{n^2 - 1}{2}$; laquelle raison composée, lorsque e est positif, est évidemment plus petite que celle de 5 à $4m$, (raison de la différence de CD à CA au demi-diamètre moyen; lorsque la densité est supposée uniforme) puisque n est nécessairement plus grand que 1. Cela a également lieu, lorsqu'il y a trois, ou plusieurs orbes pareils, pourvu que la densité soit toujours plus grande au-dedans des orbes qui sont plus près du centre.

681. Supposons donc que la Terre ADBE est une croûte avec un noyau *lmnr* renfermé au-dedans: que les surfaces elliptiques convexes & concaves ADBE, *adbe*, qui terminent la partie intérieure, soient semblables; & que d'abord *lmnr* soit une sphere. Que CD soit à Cd, comme n à 1, l'aire de la sphere *lmnr* à l'aire du sphéroïde ADBE, comme 1 à N, la force centrifuge en D à la pesanteur, comme 1 à m ; la partie extérieure, terminée par ADBE & *adbe* étant supposée d'une densité uniforme, si nous supposons que les colonnes Aa & Dd gravitent également, l'excès de CD sur CA, sera au demi-diamètre moyen par approximation en raison composée de $5n$ à $2mN$, & de $n^3 + n^3N - N$ à $2n^4 + 2n^3 + 2n^2 - 3n^2 - 3 - \frac{5n^5}{N}$; & l'augmentation de gravitation depuis l'équateur aux poles, sera à la gravitation moyenne, par approximation, comme $1 + \frac{n^3 - 30nn + 9 + 10n^5N}{2n^4 + 2n^3 - 3n - 3 - 5n^5N} \cdot \frac{n+1}{2nn}$ à $1n$.

En ce cas, la différence des demi-diamètres CD & CA, &

l'augmentation de gravitation de D vers A, peuvent être l'une & l'autre plus grandes que lorsque la densité est supposée uniforme, la raison de 1 à m étant supposée la même dans les deux cas. Par exemple, soit $n = 5$, $N = 45$, & $m = 289$, le demi-diamètre de l'équateur sera au demi-axe, comme $180\frac{1}{2}$ à $179\frac{1}{2}$, à fort peu près; & l'augmentation de gravitation depuis l'équateur aux poles sera $\frac{1}{220}$ de la gravitation moyenne. Si $lmnr$ est un sphéroïde, (comme il est plus probable) & f le foyer de l'un de ses méridiens, soit Cf au demi-diamètre moyen de ADBE :: $1 : r$, & le reste subsistant comme dans le premier cas, la différence de CD & CA sera toujours par approximation au moyen entre CD & CA, comme $5 \frac{n+1}{2m} \left(n^3 - 1 + \frac{n^3}{N} \right) - \frac{3n^5}{2rrN} \times (nn + n + 1)$ à $2n^4 + 2n^3 + 2n^2 - 3n - 3 - \frac{5n^5}{N}$. Cette raison peut se calculer par les mêmes principes, lorsque la densité est supposée croître, ou décroître depuis ADBE jusques à $adbe$. Mais parce que l'hypothese de la gravitation égale des colonnes Aa & Dd, aussi-bien que d'une densité uniforme, dans les différentes parties de chaque orbe elliptique semblable & concentrique à ADBE, peut paroître arbitraire, nous n'insisterons pas sur les conséquences qui suivroient d'une telle constitution des parties intérieures de la Terre, comme nous les avons supposées ici. Si nous supposons que la densité est uniforme dans les différentes parties de chaque orbe $adbe$, produit par une ellipse, qui a toujours le même centre & foyer que ADBE, mais qu'elle varie dans les différens orbes de cette espece, la pesanteur, en chaque point de CD, ou de CA, se calculera par les principes des articles 650 & 652. Mais les conclusions tirées de cette hypothese, lorsque la densité est supposée croître vers le centre, ne s'accordent pas mieux avec les phénomènes, que celles des articles 677 & 678. En imaginant que la densité est plus grande dans l'axe, que dans le plan de l'équateur, à égales distances du centre, on pourroit peut-être trouver une hypothese qui satisferoit à la plus part des phénomènes; mais comme cette supposition peut paroître improbable, & qu'il n'est pas aisé de calculer les conséquences qui en résulteroient, nous n'insisterons pas plus long-tems sur cette matiere. Lorsqu'on aura mesuré exactement plusieurs degrés sur le méridien, & que l'augmentation de gravitation, depuis l'équateur aux poles, aura été

déterminée par une suite de plusieurs observations exactes, on pourra examiner, avec plus de certitude, les différentes hypothèses que l'on peut imaginer au sujet de la constitution intérieure de la Terre. Nous avons toujours fait abstraction de toutes les forces qui peuvent affecter la gravitation, en y comprenant seulement la mutuelle pesanteur des particules, & leur force centrifuge.

682. La figure de la Planete de Jupiter differe considerablement de la sphere, tant par les observations des Astronomes, que par cette théorie. Selon les observations du Docteur Pound, la distance du quatrième Satellite est au plus grand demi-diamètre de Jupiter, comme 26, 63 est à 1, & son tems périodique est à celui de la révolution de Jupiter, sur son axe, comme 24032, 15 à 596. Soit donc $N a$ en raison composée du cube de 26, 63 à 1, & du quarré de 596 à 24032, 15, selon l'article 660. & N se trouvera = 11, 615. En continuant la série de l'article 660. un pas de plus, l'excès du demi-diamètre de l'équateur, sur le demi-axe, est au demi-diamètre moyen, comme 5 à 4 N $+ \frac{1.2}{7} - \frac{3}{MM} + \frac{4829}{336 N}$, &c. M étant = 26, 63 cette raison est celle de 1 à 9, 8, & le demi-axe de l'équateur au demi-axe, comme 10, 3 à 9, 3, en supposant la densité uniforme, & cela s'accorde avec le calcul de Newton. Mais la différence de ces demi-diamètres, selon M. Cassini, est seulement $\frac{1}{15}$ du demi-diamètre de Jupiter, & selon les observations du Docteur Pound, elle est entre $\frac{1}{12}$ & $\frac{1}{15}$. Ainsi, selon ce qui a été démontré dans l'article 677. la densité de Jupiter paroît croître vers le centre. Nous avons fait abstraction de l'effet de la gravitation du quatrième Satellite vers les autres, & vers l'atmosphère de Jupiter; (s'il en a une) mais la différence, entre le calcul & les observations, ne peut pas venir de là. On trouve presque la même raison des demi-diamètres de Jupiter, en calculant sur les observations de l'élongation du troisième Satellite faites par le Docteur Pound.

683. Si nous supposons que la densité de Jupiter croît, depuis la surface au centre, de la maniere dont on a parlé dans l'article 674. en sorte qu'elle devienne quadruple au centre de ce qu'elle est à la surface; alors, par l'article 677. CD étant supposé = 1 $+ x$, & $CA = 1 - x$, x approchera de $\frac{210}{453 m}$. En calculant

sur ce qui a été démontré à la fin de l'article 674. m fera, par approximation à N , comme $n + 3 + \frac{14nx}{5} + 10x$ à $(1 + 2x \times (n + 3) + \frac{24nx}{5MM})$, & supposant $n = 4$, m fera $= 12$ à fort peu près, $x = \frac{1}{25}$, 8, & le demi-diamètre de l'équateur au demi-axe, comme 13, 4 à 12, 4; ce qui diffère peu de la raison moyenne, qui résulte des observations du Docteur Pound.

684. Newton a trouvé que la densité moyenne de Jupiter est à celle de la Terre, comme $94\frac{1}{2}$ à 400. Si nous supposons $n = 4$, comme dans le dernier article, la densité, à la surface de Jupiter, sera à la densité moyenne, comme 4 à 7, & par conséquent à la densité moyenne de la Terre, comme $94\frac{1}{2}$ à 700. La terre est donc non-seulement plus dense que Jupiter, mais il y a lieu de croire, par ce qui a été démontré, touchant ces Planètes, que la raison des densités, à leurs surfaces respectives, est plus grande que celle de leurs densités moyennes, (ou que celle de $94\frac{1}{2}$ à 400) & qu'elle approche plus de la raison des densités des rayons du Soleil qui tombent sur elles, à leurs distances respectives.

685. On ne peut pas s'attendre que nous puissions découvrir, par observation, combien les distances des Satellites s'écartent de la Loi de Kepler, dont on a parlé dans l'article 659. Car, que z marque la distance du premier Satellite, telle qu'elle a été déterminée, selon cette Loi, par son tems périodique, & par la distance & le tems périodique du quatrième Satellite; c'est-à-dire, que le quarré du tems périodique du quatrième Satellite, soit à celui du premier, comme le cube de la distance du quatrième est à z^3 ; que c marque la distance du foyer du méridien de Jupiter à son centre; la distance moyenne du premier Satellite sera, par approximation, $z + \frac{n+5}{n+3} \times \frac{cc}{15z}$, laquelle lors-

que la densité est uniforme, surpasse z de $\frac{cc}{10z}$ seulement; c'est-à-dire, de moins que $\frac{1}{370}$ partie du demi-diamètre de Jupiter; & cet excès est toujours moindre lorsque n est plus grand que 1, ou lorsque la densité est supposée croître vers le centre. Il paroît donc, que que si l'on observoit quelques irrégularités dans les mouvemens de ces Satellites, ou dans les autres mouvemens célestes, on ne devroit pas les attribuer à la variation de

de figure du Soleil, ou des Planetes, par rapport à la sphere parfaite; mais à leur gravitation l'une vers l'autre, ou à quelques quelques autres causes.

686. Nous allons maintenant appliquer à la théorie des Marées la Proposition démontrée ci-devant, depuis l'article 636. jusques à l'article 641. Il suit de cette Proposition, que si nous supposons que la Terre est fluide, faisant abstraction de son mouvement sur son axe, & de l'inclinaison des lignes droites, selon lesquelles ses particules gravitent vers le Soleil ou vers la Lune, la figure, qu'elle prendroit en conséquence de la gravitation inégale de ses particules, vers l'un ou l'autre de ces corps, seroit exactement celle d'un sphéroïde oblong, dont l'axe seroit dirigé vers ce corps. Car, soit $ADBE$ une section de la Terre, par la droite DCE , que l'on suppose dirigée vers le Soleil S . Tout ce qui a été démontré touchant l'inégalité des pesanteurs de la Terre, & de la Lune vers le Soleil dans les articles 471 & 472. étant appliqué aux particules de la Terre, on démontrera, de même, que l'on peut concevoir chaque particule P , comme affectée de deux forces outre la pesanteur vers la Terre; l'une dans la direction PC , que l'action du Soleil ajoute à la gravitation de la particule P , & l'autre dans la direction Pk parallèle à CS , par laquelle l'action du Soleil tire la particule du plan AdB perpendiculaire à la droite SC en C . La premiere force est toujours comme la distance PC ; & si V représente cette force à la moyenne distance d , alors (PN & PM étant perpendiculaires à AB & DE en N & M respectivement) on peut la décomposer en deux forces, l'une $PN \cdot \frac{V}{d}$, perpendiculaire au plan AdB , & l'autre $PM \cdot \frac{V}{d}$, perpendiculaire à DE , que nous supposons maintenant être l'axe de ce sphéroïde oblong. La dernière force est $PN \cdot \frac{3V}{d}$. Donc, si la pesanteur en D est représentée par D & en A par A , CA & CD , par a & b , comme ci-devant, la particule P gravitera dans la direction PN perpendiculaire au plan AdB avec une force $\frac{D}{b} \cdot PN$, par l'article 634. & toute la force, par laquelle elle tend dans cette direction en conséquence de sa pesanteur & des autres deux forces, fera $(\frac{D}{b} - \frac{2V}{d}) PN$. Cette particule tend dans la direction PM avec une force $(\frac{A}{a} \pm \frac{V}{d}) PM$. La premiere force

Fig. 226.

ce est toujours comme PN, distance de la particule P, au plan AdD auquel sa direction est perpendiculaire; & la seconde, comme la distance à l'axe DE. Donc, par l'article 640. si toute la force en A est à toute la force en D, (c'est - à - dire, si $A + \frac{2aV}{d}$ est à $D - \frac{2bV}{d}$) comme b est à a , le fluide fera de tous côtés en *équilibre*, & chaque particule P tendra vers le sphéroïde dans une direction PK perpendiculaire à sa surface APDB, avec une force qui est mesurée par la droite PK terminée par l'axe DE en K.

687. Que L représente le logarithme de la raison de CA à DF, ou de la raison sous-doublée de $b+c$ à $b-c$, le module étant b ; par l'article 647. D fera à A, comme $2abL - 2abc$ à $bbC - aaL$. Donc $Db : Aa :: 2bbL - 2bbc : bbC - aaL$. Donc si K représente $L - c$, $Db - Aa$ fera à Db , comme $3bbK - cC - c^3$ à $2bbK$, ou (parce que $K = \frac{c^3}{3b^2} + \frac{c^5}{5b^4} + \frac{c^7}{7b^6}$, &c.) :: $\frac{2c^2}{5b^2} + \frac{12c^4, \&c.}{35b^4} : 1 + \frac{3c^2}{5b^2}$, &c. Et (parce que $Db - Aa = \frac{2bb + aa}{d}.V$, par le dernier article) $\frac{2bb + aa}{d}.V$ est à Db en même raison. Donc si nous supposons $b = d + x$, & $a = d - x$, nous trouverons que $x : d$, par approximation, :: $15V : 8D$, ou encore plus près :: $15V : 8D - 9\frac{4}{7}V$, & que l'excès de CD sur CA est au demi-diamètre moyen d , comme $15V$ est à $4D - 4\frac{1}{4}V$.

688. La force moyenne, que l'action du Soleil ajoute à la pesanteur de la Lune dans les quadratures, est à la pesanteur de la Lune vers la Terre, dans sa moyenne distance, en raison doublée du tems périodique où la Lune rouleroit autour de la Terre, dans un cercle en sa moyenne distance par sa pesanteur vers la Terre seulement, au tems périodique de la Terre autour du Soleil. Si l'on diminue la première de ces forces, en raison de la moyenne distance de la Lune au demi-diamètre de la Terre, & si l'on augmente la seconde en raison doublée, Newton trouve que V fera à D, comme 1 à 38604600. Donc l'élévation de l'eau sous l'équateur, en conséquence de sa gravitation inégale vers le Soleil, doit être au demi-diamètre de l'équateur, comme 15 à $\times 38604600$, & cette élévation doit être d'environ 1 pied $11\frac{1}{8}$ pouces; ce qui se confond presque avec celle que Newton avoit trouvée, en la calculant brièvement, par ce qu'il

démontré auparavant sur la figure de la Terre. Il conclut la force lunaire de la force solaire, en comparant leurs effets dans les syzygies, lorsqu'ils se réunissent, avec leurs effets, dans les quadratures du Soleil & de la Lune, lorsque ces forces agissent l'une contre l'autre. L'effet de la Lune est beaucoup plus grand que celui du Soleil, par l'expérience commune, & la force lunaire par ses calculs est à celle du Soleil, comme 448 à 100. Ces effets (selon les observations & sa théorie) dépendent des positions des luminaires l'un par rapport à l'autre, de leurs distances à la Terre, de leurs déclinaisons de l'équateur, des latitudes du pays, & de la forme & situation des canaux par où les marées s'étendent de l'Océan à ces pays.

689. L'élévation de l'eau, qui a été déterminée dans le dernier article, est celle qui auroit été produite sous l'équateur, par la force solaire, si la Terre avoit été fluide & sans mouvement diurne; la gravitation, vers les particules de la Terre, étant supposée décroître comme les quarrés des distances, vers elles, croissent. Mais il ne s'ensuit pas que l'élévation de l'eau, qui vient de l'action du Soleil, doive être aussi grande, si le sphéroïde allongé $ADBE$ est dans une situation différente, & si son grand axe n'est pas tourné vers le Soleil; ou lorsque toute la masse (à cause de la figure constante des parties solides) ne peut pas prendre la forme d'un tel sphéroïde. Car la différence de CD & CA , que nous avons calculée, ne vient pas seulement de l'action du Soleil, mais en partie de l'excès de la pesanteur en A sur la pesanteur en D , qui dépend de la figure de sphéroïde. Si la pesanteur avoit été supposée uniforme, l'élévation de l'eau n'auroit pas surpassé $\frac{3V}{D} \cdot d$ qui est moindre que $\frac{15V}{4D} \cdot d$ de $\frac{3V}{4D} \cdot d$, ou d'un cinquième de toute l'élévation. Lorsque le grand axe du sphéroïde allongé est tourné vers le Soleil, la force solaire, & la diminution de pesanteur à l'extrémité du grand axe, concourent ensemble à produire l'élévation de l'eau de A en D . Mais lorsque le grand axe DE forme un angle avec la droite CS , qui joint les centres du Soleil & de la Terre, pendant que la force solaire tâche d'élever l'eau dans cette ligne droite, l'excès de pesanteur en D , tend à l'élever dans un endroit différent; & si, en augmentant la vitesse du mouvement diurne, le grand axe DE devient perpendiculaire à CS , ces causes agiront directement l'une contre l'autre.

690. Newton a fait voir que l'orbite lunaire (faisant abstrac-

tion de son excentricité) doit avoir une figure elliptique, dont le centre est celui de la Terre, & le plus petit axe tourné vers le Soleil, en conséquence de l'inégalité de pesanteur de la Lune & de la Terre vers le Soleil; & en supposant que ce soit une ellipse parfaite, il tâche de déterminer la raison du petit au grand axe; *Prop. XXVIII. Lib. III. Princip.* De même, si nous supposons que la Terre roule sur son axe avec une vitesse suffisante, les particules de la Mer à l'équateur décriront des figures elliptiques autour du centre de la Terre, & rouleront comme des Satellites, sans graviter vers elles au-dessous; & DE le plus grand axe de ces ellipses étant perpendiculaire à CS, la plus grande élévation de l'eau sera en D & E. Si nous supposons que toutes les sections de la Terre, perpendiculaires à son axe, sont des ellipses de cette espèce semblables l'une à l'autre, & que toute la masse forme, ou un sphéroïde aplati, tel qu'il seroit produit par la révolution de la demi-ellipse ADB autour de son petit axe AB, ou un sphéroïde allongé, tel qu'il seroit produit par DAE, autour du grand axe DE, alors la raison de CD à CA étant telle, que (A & D représentant les pesanteurs en A & D, comme ci-devant,) A

$$- \frac{CA}{CD} D : 3V :: CA : \text{au demi-diamètre moyen, toute la force}$$

qui agiroit sur chaque particule P, résultant de sa pesanteur & de l'action du Soleil, seroit dirigée précisément au centre C, & varieroit en même raison que la distance PC. Car *b* représentant CD & *a* CA; *d* le demi-diamètre moyen, comme ci-devant, soit PN perpendiculaire à DE en N, PM à AB en M, & soit Nq sur NC en même raison à NC, que Da : Ab. Joignez Pq, & prolongez-la jusques à la rencontre de AB en Q. Par l'article 635. la pesanteur en P, vers ce sphéroïde, agira dans la direction PQ, & sera toujours comme PQ. Puisque Nq : NC :: Da : Ab, Cq : NC :: Ab — Da : Ab, ou (par la supposition) :: $\frac{3aV}{d} : A$,

c'est-à-dire, comme la force, par laquelle l'action du Soleil tâche de tirer l'eau en A du plan perpendiculaire à CS, est à la pesanteur en A, ou comme la force Pk, par laquelle l'action du Soleil tâche de tirer de ce plan la particule P est à la pesanteur en P dans la direction PN, par l'article 634. Donc CQ : PQ :: la force Pk : à la pesanteur en P; & la force qui agit en P, composée de la pesanteur & de la force Pk, agit précisément dans la direction PC, & varie en même raison que la distance PC. L'autre force, que l'action solaire ajoute à la pesanteur, est dirigée vers

C, & varie de même, comme PC. Donc toute la force qui, dans ce cas, agit sur chaque particule P, tend précisément au centre du sphéroïde, & est comme la distance PC. Et (par l'article 445.) chaque particule P, dans le plan de l'équateur, sortant de chaque point P avec une vitesse suffisante, décrirait l'ellipse ADBE exactement, dans le même tems qu'un corps décrirait un cercle autour de C, par la force $D + \frac{b}{d}V$, ou en chaque distance CP, par toute la force qui agit en P: ou si la Terre étoit supposée rouler sur son axe, dans ce tems-là, l'eau, dans le canal EADB, seroit mue librement dans cette figure, sans graviter sur le fonds du canal.

691. L'élévation de l'eau, en ce cas, où l'excès de CD sur CA dépend de la supposition que $Ab - aD : 3Vb :: a : d$, par laquelle toute la force composée, qui agit sur chaque particule du sphéroïde, se réduit précisément à la direction PC, en sorte qu'elle soit mesurée par PC. Pour déterminer cette élévation, & la forme de l'ellipse EADB, la distance du foyer au centre étant représentée par c , $A : D :: 1 + \frac{2cc}{5bb}$, &c. : $1 + \frac{3cc}{10bb}$, &c. par l'art. 655. ou (b étant représentée par $d + x$, & a par $d - x$) comme $d + \frac{8x}{5} : d + \frac{6x}{5}$ par approximation, par conséquent Ab est à $Da :: d + \frac{13x}{5} : d + \frac{x}{5}$, & $Ab - Da : Da :: \frac{12}{5}x : d$. Donc $3V : D :: 12x : 5d$, ou $x : d :: 5V : 4D$, & toute l'élévation de l'eau, ou $2x : d :: 5V : 2D$. On trouvera, de même, que c'est là l'élévation de l'eau, lorsque la figure est supposée être un sphéroïde allongé, produit par une demi-ellipse EAD autour de l'axe ED. Mais lorsqu'on a fait abstraction du mouvement diurne de la Terre, dans l'art. 688. l'élévation de l'eau a été trouvée de $\frac{15V}{4D}d$, (la même que Newton a déterminée,) laquelle est plus grande que celle-ci $\frac{5V}{2D}d$ en raison de 3 à 2. Le grand axe du sphéroïde DE n'est pas dans la position que nous avons supposée ici; mais lorsque l'axe DE forme avec CS un angle, l'élévation déterminée dans l'article 688. doit être diminuée à cet égard.

692. Newton ayant considéré l'élévation de l'eau, & la figure elliptique de l'orbe lunaire, (faisant abstraction de son excentricité) comme des phénomènes semblables provenans de la force solaire, imaginons maintenant que DBAE représente l'orbe lunai-

re plein d'eau; la différence des demi-diamètres CD & CA , selon le dernier article, sera au demi-diamètre moyen, comme $5V$ à $2D$, c'est-à-dire, (dans la supposition présente) comme 5 à $2 \times 178\frac{2}{3}$, ou :: $1 : 71$, & CA seroit à CD , comme 70 à 71 . Selon la Proposition XXVIII. du Liv. III. des Principes, cette raison est celle de 69 à 79 . Cet accord paroît casuel; mais on voit par là, que si nous avions déterminé l'élévation de l'eau, ou la différence de CD à CA , par la figure qui est dans cette Proposition, attribuée à l'orbite lunaire, nous l'aurions trouvée presque la même que dans le dernier article. On la trouvera néantmoins, à fort peu près égale à celle qui a été calculée dans l'article 688. si nous la déterminons par la figure que le Docteur Halley attribue à l'orbite lunaire, selon ces observations.

693. Puisque la Terre n'est pas fluide, & que ses parties solides conservent toujours la même figure dans toutes les positions du Soleil, ou de la Lune, l'élévation de l'eau doit être différente de ce qui a été déterminé dans l'article 688. à cet égard, & que l'effet en doive être sensible, on le voit, par l'article 689. où l'on trouve qu'une différence de deux pieds seulement entre CD & CA demi-diamètres du sphéroïde, occasionne une élévation de presque cinq pouces. Si la Terre étoit une sphère solide d'une densité uniforme, & si (faisant abstraction de son mouvement diurne) l'eau dans un petit canal $ADBE$, à la surface de son équateur étoit affectée de la force solaire, on trouveroit (comme dans l'article 492.) que si nous supposions que l'eau, dans ce canal, prend une figure, telle que toute la force qui agit sur chaque particule P , résultante de la pesanteur, & de l'action solaire, fût toujours perpendiculaire à la surface du fluide, la différence de CD & CA seroit au demi-diamètre CD , comme $3V$ à $2D$; par conséquent, en ce cas, l'élévation de l'eau ne seroit que $\frac{2}{7}$ de celle qui a été déterminée dans l'article 688. Les forces qui produisent ce phénomène sont très-petites, en comparaison de la pesanteur de l'eau, & les circonstances, que l'on peut négliger, sans rien craindre, dans les autres recherches, peuvent avoir un effet sensible dans celle-ci.

694. Il y a des causes particulières, outre celles du dernier article, & celle dont Newton a fait mention, qui se mêlent dans les différens phénomènes des marées. L'inégalité des vitesses de révolution des corps, par le mouvement diurne de la Terre autour de son axe, en différentes latitudes, peut produire quelques

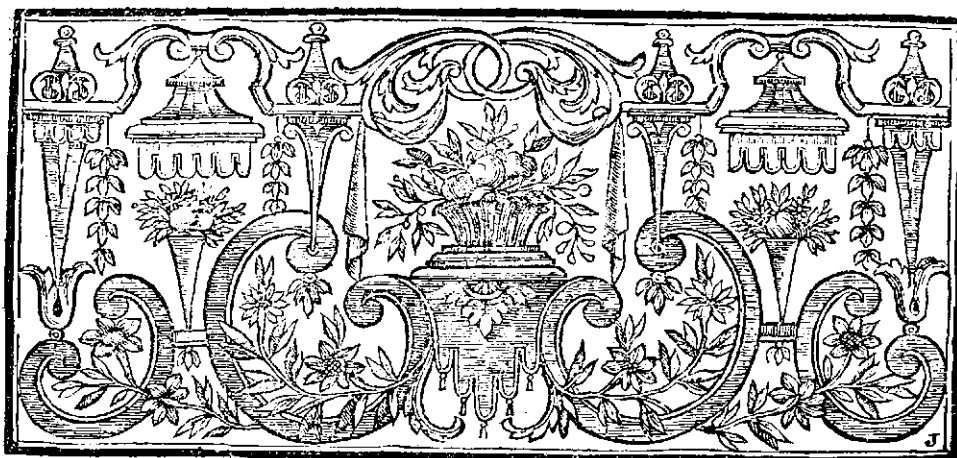
effets sur les mouvemens de la Mer & de l'air ; & occasionner des marées plus grandes que celles qui résulteroient de cette théorie, surtout si leur course n'étoit pas loin du méridien. Un courant qui tend directement vers le Nord, doit, à cet égard, tourner un peu vers l'Est ; s'il tend vers le Sud, sa route doit incliner vers l'Ouest, & par ce changement de direction, il peut, en certains cas, acquérir une plus grande force. On pourroit peut-être rendre compte de plusieurs phénomènes, par cette considération. Mais ce n'est pas ici le lieu de passer plus loin ces recherches.

695. S'il y a un Océan dans Jupiter, les marées doivent y être fort considérables, lorsque tous, ou la plupart de ses Satellites sont dans une ligne droite ; & il seroit bon d'observer, si les grands & subits changemens, que les Astronomes ont de tems en tems apperçû sur la surface de cette Planete, n'ont pas une analogie avec leurs conjonctions, & leurs oppositions. Si les autres Planetes secondaires, aussi-bien que la Lune, se mouvoient sur leurs axes, en sorte qu'elles eussent toujours presque le même hémisphere tourné vers leurs Planetes principales, les marées, dans leurs Mers, (s'il y en avoit quelque une) viendroient principalement de la variation de leurs distances à la Planete, & cette variation suffiroit : au lieu que leurs marées seroient probablement trop grandes, si elles rouloient sur leurs axes avec une plus grande vitesse.

696. Dans ce Chapitre, nous avons tâché de déterminer exactement quelques-unes des conséquences de la théorie de Newton sur la pesanteur, étant persuadé que, quelque obscure que soit la cause de la pesanteur, à peine y a-t'il une Proposition, dans la Philosophie expérimentale, qui soit plus évidente que celle où l'on établit qu'il y a une telle puissance dans la nature, & qu'elle observe les loix que nous avons supposées. Nous nous sommes servis, de tems en tems, du terme d'*attraction*, uniquement comme d'une expression commode, & parce qu'elle sert à distinguer la pesanteur réelle de la pesanteur apparente ; celle-ci étant souvent une combinaison de la pesanteur, & de plusieurs autres puissances. Newton a fait voir comment on pouvoit calculer l'attraction des corps, lorsqu'on suppose que leurs particules s'attirent mutuellement, selon d'autres loix. Nous joindrons seulement ici une preuve aisée, d'une Proposition sur cette matiere. Supposons que l'attraction des particules du cone PAEa décroisse Fig. 283

se en même proportion que les cubes des distances, à ces particules, croissent; une particule en P doit tendre vers la surface sphérique MN^m (qui a son centre en P) avec une force qui est comme cette surface (ou PM^2) directement, & comme PM^3 réciproquement; c'est-à-dire, avec une force qui est comme PM réciproquement ou directement, comme MV , ordonnée de l'hyperbole KVI , décrite entre les asymptotes PA & PH . Donc, l'attraction du cône tronqué $MN^mA E a$ sera mesurée par l'aire hyperbolique $MVIA$ terminée par les ordonnées en A & M ; & l'attraction du cône PMN^m par l'aire hyperbolique infinie qui est conçue formée entre l'ordonnée MV & l'asymptote PH . Il suit, que si une telle loi pouvoit avoir lieu, la particule P tendroit vers la moindre portion qu'elle toucheroit, avec plus de force que vers le plus grand corps, à la plus petite distance qu'on pourroit supposer. La même chose se démontre aisément, par l'article 297. lorsque l'attraction des particules décroît comme des puissances de leurs distances, plus élevées que leurs cubes, croissent. Comme de telles loix seroient très-incapables de conserver les corps célestes dans leurs courses régulières, (par les articles 447 & 448.) aussi seroient-elles incapables de produire une force suffisante pour conserver ensemble leurs différentes parties. La vraie loi de la pesanteur est plus propre à ces deux vues. C'est une chaîne qui tient leurs parties unies, qui perpétue leurs mouvemens dans le grand système autour du Soleil, & qui maintient les révolutions dans les moindres systèmes; dont il est composé à fort peu près régulières. Ses inégalités, dans certains cas, ont leur usage, comme dans les marées; & l'on trouve souvent une simplicité Géométrique, remarquable dans les conclusions qui en sont tirées. Nous en avons plusieurs exemples, comme dans les articles 445, 446, 636, 686 & 690.

Fin du premier Livre.



LIVRE SECOND.



DES CALCULS DANS LA MÉTHODE DES FLUXIONS.

CHAPITRE PREMIER.

Des Fluxions des quantités considérées abstractivement, ou comme représentées par les caractères généraux de l'Algebre.

697.



L'IDÉE d'une Fluxion, telle qu'on l'a donnée dans les articles 10 & 11. d'après Newton, paroît convenir plus immédiatement aux grandeurs Géométriques, que nous pouvons fort naturellement concevoir comme formées par le mouvement, qu'elle ne convient aux quantités considérées abstractivement, ou telles qu'elles sont exprimées par les symboles généraux de l'Algebre. C'est pour cela que nous ayons

principalement considéré les Fluxions des grandeurs Géométriques dans le premier Livre, & que nous avons tiré, pour l'ordinaire, nos démonstrations de la Géométrie, parce qu'on les préfère souvent aux calculs algébriques, comme étant plus propres à contenter l'esprit. On a contesté l'évidence de cette Méthode, & l'on a fait des objections contre le nombre des symboles qu'on y emploie, comme s'ils devoient servir à couvrir les défauts des principes, & des démonstrations. Pour détruire de pareils soupçons, nous avons tâché d'exposer cette Méthode, d'une manière qui en représente les Théorèmes clairement, & dans toute leur étendue, sans aucun signe, ou caractère particulier, afin qu'on puisse les soumettre plus facilement à l'examen le plus rigoureux.

698. Mais il nous reste encore à exposer une partie importante de cette théorie. Les progrès qu'on a fait, par son moyen, tant en Géométrie qu'en Philosophie, viennent principalement de la facilité, de la précision & de la vaste étendue de la Méthode du Calcul, ou de la partie Algébrique. C'est pour se procurer ces grands avantages qu'on a employé tant de symboles en Algèbre, dont le nombre & la complication (joint à la grande attention que l'on a toujours eue, de traiter la Géométrie dans le goût des modèles excellens, que les Anciens nous ont laissé) ont plus contribué à occasionner la préférence qu'on a souvent donné à la Géométrie, en genre de clarté & d'évidence, qu'aucune différence essentielle que l'on puisse supposer entre la Géométrie & l'Algèbre. C'est une espèce d'Arithmétique générale, & c'est ce qui rend son usage si étendu. Mais on ne peut pas supposer que cela donne atteinte à son évidence; puisque nous n'avons pas des idées plus claires, ou plus distinctes, que celles des nombres, & que souvent on trouve plus de satisfaction & de clarté dans le calcul, que dans les constructions. On peut l'avoir employée pour couvrir, sous la complication des symboles, certaines théories obscures, qu'on auroit pas pu exposer au grand jour sous la forme Géométrique. Mais il est hors de doute qu'on ne doit pas moins éviter l'obscurité, dans cette Science, que dans la Géométrie, en définissant clairement la valeur & l'usage des symboles, & marchant toujours, dans la suite, avec circonspection.

699. L'usage du signe négatif, en Algèbre, donne lieu à plusieurs conséquences qu'on a eu d'abord de la peine à admettre, &

qui ont souvent donné occasion à des idées qui paroissent n'avoir aucun fondement réel. Ce signe fait voir que la valeur réelle de la quantité représentée, par la lettre qui le suit, doit être soustraite, & il sert, avec le signe positif, à mettre sous les yeux les élémens où les parties entrent dans la composition des quantités, & de qu'elle manière elles y entrent, soit comme incrémens, ou comme décrémens, (c'est-à-dire, soit par addition, ou par soustraction) ce qui est d'un très-grand usage dans cette Science. C'est pour cela qu'il sert à exprimer une quantité d'une qualité opposée à la quantité positive, comme une ligne dans une position contraire, un mouvement d'une direction opposée, ou une force centrifuge en opposition avec la pesanteur; & ainsi souvent il épargne l'embarras de distinguer & de démontrer séparément les différens cas des Propositions, & il met sous les yeux leur analogie. Mais comme la proportion des lignes dépend uniquement de leur grandeur, sans aucun égard à leur position, & que les mouvemens & les forces sont égales, ou inégales en raison donnée quelconque, sans égard à leurs directions; & qu'en général, la proportion des quantités, n'est relative qu'à leur grandeur, sans déterminer si on doit les considérer comme incrémens, ou comme décrémens; ainsi il n'y a pas lieu d'imaginer aucune autre proportion entre $-b$ & $+a$ (ou de -1 & 1) que celle des grandeurs réelles des quantités représentées par b & a soit que ces quantités, dans un cas particulier, doivent être ajoutées ou retranchées. C'est la même chose de soustraire un décrément, que d'ajouter un incrément égal, ou de soustraire $-b$ de $a - b$ que d'ajouter un incrément $+b$: & que parce qu'en multipliant une quantité, par un nombre négatif, on ne fait que répéter la soustraction de cette quantité; si je multiplie $-b$ par $-n$, je soustrais $-b$ aussi souvent qu'il y a d'unités dans n ; il s'ensuit que c'est la même chose que si on ajoutoit $+b$ aussi souvent, ou le même que si l'on ajoutoit $+nb$. Mais si l'on conclut de-là, que 1 est à $-n$, comme $-b$ à nb , selon la règle que l'unité est à un des facteurs, comme l'autre facteur est au produit; il n'y auroit pas lieu d'imaginer qu'il y eût la dedans quelque mystère, ou quelque autre idée, que celle que les grandeurs réelles représentées par 1 , n , b & nb sont proportionnelles. Car cette règle ne se rapporte qu'à la grandeur des facteurs, & de leurs produits, sans déterminer si l'un des facteurs, ou le produit doit être ajouté, ou retranché. Mais cela

doit être déterminé par les calculs Algébriques, & c'est-là proprement l'usage des regles, concernant les signes, sans lesquels on ne peut pas aller en avant. Puisqu'une quantité, qui doit être soustraite, n'est jamais produite, dans la composition, par une addition répétée d'une quantité positive, ni par une soustraction répétée d'une quantité négative, un nombre quarré négatif n'est jamais produit par la composition d'une racine. Ainsi $\sqrt{-1}$, ou la racine quarrée d'une quantité négative, désigne une quantité imaginaire, & dans la solution d'un Problème, c'est une marque, ou un caractère des cas impossibles de ce Problème, à moins qu'elle ne soit composée par d'autres symboles, ou suppositions imaginaires, en sorte que l'expression totale puisse avoir une valeur réelle. Par exemple, $1 + \sqrt{-1}$ & $1 - \sqrt{-1}$ pris séparément sont imaginaires; mais leur somme est 2, comme les conditions, qui séparément rendroient la solution d'un Problème impossible, se détruisent, en certains cas, l'une & l'autre lorsqu'elles sont jointes ensemble. Lorsqu'on cherche des conclusions générales, & des symboles simples pour les représenter, il en résulte souvent des expressions de cette espece, où le symbole imaginaire est compensé d'une maniere qui ne se présente pas toujours si clairement. On peut néanmoins, par des substitutions particulieres, transformer l'expression en une autre, où chaque terme particulier peut avoir une signification réelle, aussi bien que toute l'expression. Les Théorèmes, que l'on découvre souvent avec brièveté par l'usage de ce symbole, peuvent démontrer, sans son secours, par l'opération inverse, ou par d'autres voyes; & quoique ces symboles soient de quelque usage dans les calculs de la Méthode des Fluxions, on ne peut pas dire que son évidence dépende d'aucun artifice de cette espece. Nous avons fait mention de ces choses, sans nous y étendre, parce que nous supposons que l'Algebre commune est admise.

700. Les regles, pour les calculs de cette Méthode, peuvent se déduire de l'article 99; mais il est bon de les démontrer ici brièvement, par les principes généraux, qui paroissent convenir plus immédiatement aux quantités algébriques. Les quantités, qui sont produites l'une de l'autre par une opération algébrique, étant supposées croître, ou décroître en même tems, quelques-unes se trouveront croître, ou décroître par des différences plus grandes, ou en plus grande raison, d'autres par de moindres dif-

férences, ou en moindre raison, & pendant que quelques-unes sont supposées croître, ou décroître en raison constante, par des différences successives égales, d'autres croîtront ou décroîtront par des différences qui varient sans cesse. Nous n'avons pas occasion de considérer, dans cette théorie, ces quantités comme produites par le mouvement, & d'examiner les vitesses de ces mouvemens, on de considérer les premières, ou dernières vitesses de leurs incréments, ou décréments, mais de fixer les raisons respectives, selon lesquelles elles croissent, ou décroissent, lorsqu'on les suppose varier ensemble; pour pouvoir, par ce moyen, découvrir les propriétés de ces quantités mêmes. Ainsi, en comparant les vitesses des points, qui sont supposés produire des lignes, en même tems ou voit si une ligne croît en plus grande, ou en plus petite raison qu'une autre ligne, & en quelle proportion. On doit dire la même chose de toutes les autres quantités, lesquelles, variant ensemble, sont toujours en même proportion, l'une à l'autre, que ces lignes. Mais il ne paroît pas qu'il soit nécessaire d'avoir toujours recours à de telles suppositions; quoiqu'en traitant des grandeurs Géométriques, que l'on conçoit souvent comme produites par le mouvement, cette méthode de comparer le rapport de leur accroissement, ou décroissement, soit claire & naturelle, & qu'elle ait d'autres avantages. (article 474.) Lorsqu'une quantité A croît par des différences égales a , $2A$ croît, ou décroît par des différences égales à $2a$, & il est clair qu'elle croît, ou décroît dans un plus grand rapport que A , en proportion de $2a$ à a , ou de 2 à 1 ; & si m & n sont invariables, $\frac{m A}{n}$ croît ou décroît par des différences $= \frac{m a}{n}$, & par conséquent en plus grand, ou moindre rapport que A , à proportion que $\frac{m a}{n}$ est plus grand, ou moindre que a , ou que m est plus grand, ou moindre que n . Cela paroît fort aisé à comprendre, sans avoir recours à d'autres considérations, qu'aux relations des différences, par lesquelles les quantités croissent, ou décroissent. Ainsi, pour éviter, autant qu'il est possible, la fréquente répétition des expressions figurées dans cette partie algébrique, nous tâcherons de substituer aux Définitions & Axiomes des articles 11 & 15, d'autres Définitions & Axiomes qui auront une plus grande généralité, mais qui s'accorderont parfaitement avec les premiers, & qui seront mieux démontrés.

par ceux-là; comme les autres principes & propositions de l'Algebre sont communément mieux éclaircies par la Géométrie.

701. Nous appellerons donc *Fluxions* des quantités, toutes les mesures de leurs rapports respectifs d'accroissement, ou de décroissement, pendant qu'elles varient (ou fluent) ensemble. Il n'y a point de difficulté à déterminer ces mesures, lorsque les quantités croissent, ou décroissent par des différences successives, qui sont toujours dans la même proportion invariable l'une à l'autre, comme dans le dernier article. Pendant que A croissant devient $= A + a$, ou qu'en décroissant il devient $= A - a$, $2A$ devient $= 2A + 2a$, ou $= 2A - 2a$, selon que $2A$ croît, ou décroît dans un plus grand rapport que A , en proportion de $2a$ à a ; en sorte que la Fluxion de A étant supposée $= a$, celle de $2A$ sera $= 2a$. De même, la Fluxion de $\frac{m}{n}A$ (ou de $\frac{m}{n}A \mp e$, supposant m , n , & e invariables) est $\frac{m}{n}a$; & puisque m est à n en une raison déterminable, on peut toujours assigner une quantité qui croisse, ou décroisse en plus grand ou en moindre rapport que A , en quelque proportion, ou qui ait sa Fluxion plus grande, ou moindre que celle de A en quelque raison. En pareils cas, la raison des Fluxions est la même que celle des différences par lesquelles les quantités croissent ou décroissent.

702. Mais pendant que A est supposé croître dans un rapport constant, par des différences successives égales, si B croît, ou décroît par des différences qui varient sans cesse, on ne peut pas dire que B croisse, ou décroisse dans aucun rapport constant; & il n'est si facile de déterminer la Fluxion variable de B , en supposant celle de A égale à son incrément a . On ne peut pas supposer que les Fluxions & les différences soient toujours, dans ce cas, en même proportion; mais il est cependant évident, que si B croît par des différences toujours plus grandes, que les différences égales & successives, par lesquelles $\frac{m}{n}A$ croît, il ne peut pas croître dans un moindre rapport que $\frac{m}{n}A$, & qu'il ne peut pas aussi croître dans un plus grand rapport que $\frac{m}{n}A$, lorsque ses différences successives sont toujours moindres que celles de $\frac{m}{n}A$. La Fluxion de A étant toujours représentée par a , celle de B ne peut donc par être moindre que $\frac{m}{n}a$ dans le pre-

mier cas, ou plus grande que $\frac{m}{n}a$ dans le second. Les Propositions suivantes, sont des conséquences de celle-ci, & elles nous mettront en état de déterminer en quel rapport B croît, lorsque sa relation avec A est connue.

703. Les valeurs successives de la racine A étant représentées par $A - a, A, A + a, \&c.$ lesquelles croissent d'une différence constante a , soient les valeurs correspondantes d'une quantité dérivée de A, par quelque opération Algébrique (ou qui en dépend, en sorte qu'elle varie avec A) $B - b, B, B + b, \&c.$ Si les différences successives $b, b, \&c.$ de la dernière quantité croissent toujours, quelque petit que a puisse être, on ne peut pas dire que B croisse dans une proportion aussi grande qu'une quantité qui croît uniformément, par des différences successives égales plus grandes que b , ou dans une proportion aussi petite qu'une quantité qui croît uniformément, par des différences successives égales, moindres que b . De même, si la relation des quantités est telle que les différences successives $b, b, \&c.$ décroissent continuellement, on ne peut pas dire que B croisse en même proportion qu'une quantité qui croît uniformément par des différences successives égales, plus grande que b , ou moindres que b .

704. Donc la Fluxion de A étant supposée égale à l'incrément a , celle de B ne peut pas être plus grande que b , ou moindre que b , lorsque les différences successives $b, b, \&c.$ croissent continuellement, & elle ne peut pas être plus grande que b , ou moindre que b , lorsqu'elles décroissent toujours.

705. De même, si la dernière quantité décroît, pendant que la première croît, & que ses valeurs successives soient $B + b, B, B - b, \&c.$ les décrémens $b, b, \&c.$ croissant continuellement, on ne peut pas dire que B décroisse en aussi grande proportion qu'une quantité, qui décroît uniformément, par des différences successives égales, plus grandes que b , ou en proportion aussi petite qu'une quantité qui décroît uniformément, par des différences successives égales, moindres que b . Donc, en ce cas, la Fluxion de A étant supposée $= a$, celle de B ne peut pas être plus grande que b , ou moindre que b . Et de même, si les décrémens successifs $b, b, \&c.$ décroissent toujours, la Fluxion de B ne peut pas être plus grande que b , ou moindre que b .

706. Comme les Fluxions des quantités sont les mesures des

rapports respectifs selon lesquels elles croissent, ou décroissent, par l'article 701. il n'importe pas que ces mesures soient grandes, ou petites, pourvu qu'elles soient dans la juste proportion, ou relation l'une à l'autre. Donc, si les Fluxions de A & B sont supposées égales à a & b , respectivement, on peut, de même, les supposer égales à $\frac{1}{2}a$ & $\frac{1}{2}b$, ou à $\frac{ma}{n}$, & $\frac{mb}{n}$. Ces principes (comme les autres Propositions Algébriques) peuvent se démontrer par la Géométrie, ainsi que nous l'avons observé dans l'article 700. & les Propositions concernant les Fluxions des aires, ordonnées, &c. dans le premier Livre, peuvent se démontrer immédiatement par-là; mais cela n'est pas nécessaire.

707. PROPOSITION PREMIERE. *La Fluxion de la racine A étant supposée = a, celle du quarré AA sera = 2A.a.*

Que les valeurs successives de cette racine soient $A-u$, A , $A+u$, les valeurs correspondantes du quarré seront $AA-u^2$, AA , $AA+2Au+u^2$, lesquelles croissent par les différences $2Au-u^2$, $2Au+u^2$, &c. & parce que ces différences croissent, il suit, de l'article 704. que si la Fluxion de A est représentée par u , celle de AA ne peut pas être représentée par une quantité plus grande que $2Au+u^2$, ou moindre que $2Au-u^2$. Ce qui étant, je suppose, comme dans la Proposition que la Fluxion de A est $=a$. Si celle de AA n'étoit pas $=2Aa$, qu'elle soit d'abord plus grande que $2Aa$ en une raison quelconque, comme en celle de $2A+o$, à $2A$, & par conséquent $=2Aa+oa$. Supposons maintenant que u est un incrément de A moindre que o ; puisque $a:u::2Au+oa:2Au+ou$, il suit, (article 706.) que si la Fluxion de A est représentée par u , celle de AA sera représentée par $2Au+ou$, qui est plus grande que $2Au+u^2$. Mais on a fait voir, par l'article 704. que si la Fluxion de A est représentée par u , celle de AA ne peut pas être représentée par une quantité plus grande que $2Au+u^2$. Ce qui étant contradictoire, il suit que la Fluxion de A étant $=a$, celle de AA ne peut pas être plus grande que $2Aa$. Si, dans ce cas, elle paroît être plus petite que $2Aa$, qu'elle soit moindre en raison de $2A-o$ à $2A$, & par conséquent $=2Aa-oa$. Donc, puisque $a:u::2Aa-oa:2Au-uu$, qui est moindre que $2Au-u^2$, (u étant supposé moindre que o , comme ci-devant,) il suit que si la Fluxion de A étoit représentée par u , celle de AA le feroit par une quantité moindre que $2Au-u^2$,

2 $Au - uu$, contre ce qu'on a démontré par l'article 704. Donc la Fluxion de A étant $=a$ celle de AA est $=2Aa$.

708. Les Fluxions de A & B étant supposées égales à a & b respectivement, celle de $A+B$ sera $=a+b$, celle de $(A+B)^2$, ou de $AA+2AB+BB$ sera $=2(A+B) \times (a+b)$, ou $2Aa+2Bb+2Ba+2Ab$, par le dernier article. Celle de $AA+BB$ est $2Aa+2Bb$, par le même. Donc la Fluxion de $2AB$ est $2Ba+2Ab$, & celle de AB est $Ba+Ab$. Ainsi P étant $=BB$, & la Fluxion de P étant p , p sera $=Ba+Ab$, & divisant par P , ou AB , nous trouverons $\frac{p}{P} = \frac{a}{A} + \frac{b}{B}$. Si $Q = \frac{A}{B}$, & que q soit la Fluxion de Q , QB sera $=A \frac{q}{Q} + \frac{b}{B} = \frac{a}{A}$, ou $\frac{q}{Q} = \frac{a}{A} - \frac{b}{B}$, & par conséquent $q = \frac{Qa}{A} - \frac{Qb}{B} = \frac{a}{A} - \frac{Ab}{BB}$, ou $= \frac{aB - Ab}{BB}$. Lorsque l'une des quantités décroît, sa Fluxion est regardée comme négative.

709. Si n est un nombre entier, & si la somme des termes E^{n-1} , $E^{n-2}F$, $E^{n-3}F^2$, $E^{n-4}F^3$, &c. continuée jusques à ce que leur nombre soit $=n$, est multipliée par $E-F$, le produit sera $E^n - F^n$. Car le produit de cette somme par E est $E^n + E^{n-1}F + E^{n-2}F^2 + \dots + EF^{n-1}$. Cette somme multipliée par $-F$ donne $-E^{n-1}F - E^{n-2}F^2 - \dots - EF^{n-1} - F^n$, & la somme de ces deux produits est $E^n - F^n$.

710. Supposant E plus grand que F , $E^n - F^n$ fera moindre que nE^{n-1} , $(E-F)$ mais plus grand que $nF^{n-1}(E-F)$. Car chacun des termes E^{n-1} , $E^{n-2}F$, $E^{n-3}F^2$, &c. est plus grand que le suivant, en même raison que E est plus grand que F , & E^{n-1} est le plus grand terme. Par conséquent le nombre des termes étant $=n$, nE^{n-1} est plus grand que leur somme, & $nE^{n-1}(E-F)$ est plus grand que cette somme multipliée par $E-F$, ou (par le dernier article,) plus grand que $E^n - F^n$. Puisque le dernier terme F^{n-1} est moindre qu'aucun des ter-

mes précédens, $nF^{n-1}(E-F)$ est moindre que la somme multipliée par $E-F$, ou moindre que $E^n - F^n$.

711. Lorsque n est un nombre entier positif, la racine A étant supposée croître, par des différences successives égales, les différences successives de la puissance A^n croîtront continuellement. Car, soient $A-a$, A , $A+a$, les valeurs successives de la racine, & $(A-a)^n$, A^n , $(A+a)^n$ les valeurs correspondantes de la puissance, mais $(A+a)^n - A^n$ est plus grand que $nA^{n-1}a$, comme on le voit en substituant, dans le dernier article, $A+a$ pour E , A pour F , & a pour $E-F$. De même, $nA^{n-1}a$ est plus grand que $A^n - (A-a)^n$, substituant $A-a$ pour F , & A pour E . Donc $(A+a)^n - A^n$ est plus grand que $A^n - (A-a)^n$, & les différences successives de la puissance croissent continuellement.

712. PROPOSITION II. La Fluxion de la racine A étant supposée $=a$, celle de la puissance A^n sera naA^{n-1} .

Car, si la Fluxion de A^n pouvoit être plus grande que naA^{n-1} , soit son excès égal à une quantité r ; supposons o égal à l'excès de $\sqrt[n-1]{A^{n-1} + \frac{r}{na}}$ par-dessus A , & par conséquent $(A+o)^{n-1} = A^{n-1} + \frac{na}{r}$. Donc $na(A+o)^{n-1} = naA^{n-1} + r$, Fluxion de A^n . Soit u un incrément de A moindre que o ; puisque $a:u::na(A+o)^{n-1}:nu(A+o)^{n-1}$, il suit, (par l'article 706.) que si la Fluxion de A est maintenant représentée par l'incrément u , celle de A^n le sera par $nu(A+o)^{n-1}$ qui est plus grand que $nu(A+u)^{n-1}$, & ce dernier est lui-même plus grand que $(A+u)^n - A^n$, (par l'article 710.) Mais lorsque les valeurs successives de la racine sont $A-u$, A , $A+u$, celles de la puissance sont $(A-u)^n$, A^n , $(A+u)^n$, dont les différences successives croissent continuellement. Donc (par l'art. 704.) si la Fluxion de A est représentée par u , celle de A^n ne peut pas être représentée

par une quantité plus grande que $(A + u)^n - A^n$, ou moindre que $A^n - (A - u)^n$: ce qui étant contradictoire, il suit que la Fluxion de A étant supposée $= a$, celle de A^n ne peut pas être plus grande que $na A^{n-1}$. Si elle pouvoit être plus petite, supposons-la $= na A^{n-1} - r$, ou (en supposant $o = A - \sqrt[n-1]{A^{n-1} \frac{r}{na}} = na (A - o)^{n-1}$. Donc supposant u moindre que o , si la Fluxion de A est représentée par u , celle de A^n le fera par $nu (A - o)^{n-1}$ qui est moindre que $nu (A - u)^{n-1}$, (parce qu'on suppose $u < o$) & par conséquent moindre que $A^n - (A - u)^n$, par l'article 10. Mais cela est contraire à ce qu'on a démontré, par l'article 704. Donc la Fluxion de A étant $= a$, celle de A^n fera $= na A^{n-1}$.

713. On peut déterminer, de la même manière, les Fluxions de $\frac{1}{A^n}$, ou de A^{-n} ; mais ces Fluxions étant comprises dans le Théorème suivant, il est inutile de les considérer séparément. Nous remarquerons seulement que le Lemme pour déterminer la première est que, lorsque E est plus grand que F , $\frac{1}{F^n} - \frac{1}{E^n}$, ou $\frac{E^n - F^n}{E^n F^n}$ est moindre que $\frac{nE^{n-1}}{E^n F^n} (E - F)$ par l'article 710. ou $\frac{nE - nF}{E F^n}$ qui est moindre que $\frac{nE - nF}{F^{n+1}}$; mais plus grand que $\frac{nF^{n-1}}{E^n F^n} (E - F)$ par l'article 710. & par conséquent plus grand que $\frac{nE - nF}{E^{n+1}}$. Et par là on peut démontrer, comme dans l'article 712. que la Fluxion de A étant supposée $= a$, celle de $\frac{1}{A^n}$ est $\frac{-na}{A^{n+1}}$, le signe étant négatif, parce que $\frac{1}{A^n}$ décroît pendant que A croît. Nous avons supposé, dans cet article, & dans le dernier que n est un nombre positif.

714. PROPOSITION III. La Fluxion de A étant supposée $= a$, celle de $A^{\frac{m}{n}}$ est $\frac{m a}{n} A^{\frac{m}{n}-1}$.

Soit, 1°. l'exposant $\frac{m}{n}$ une fraction positive quelconque ; soit $A^{\frac{m}{n}} = K$, donc $A^m = K^n$; la Fluxion de K étant supposée $= k$, $m a A^{m-1} = n k K^{n-1}$, par l'article 712. & k où la Fluxion de $A^{\frac{m}{n}}$ sera $= \frac{m a A^{m-1}}{n K^{n-1}} = \frac{m a K}{n A} = \frac{m}{n} a A^{\frac{m}{n}-1}$.

2°. Lorsque $\frac{m}{n}$ est négative, supposons-la $= -r$ & $A^{-r} = K$, ou $1 = A^r K$; prenant les Fluxions (par l'article 708.) $r A^{r-1} a K + k A^r = 0$, & $k = - \frac{r A^{r-1} a K}{A^r} = -r A^{-r-1} a = \frac{m}{n} A^{\frac{m}{n}-1} a$.

715. PROPOSITION IV. Soit P le produit du nombre de facteurs A, B, C, D, E , &c. (ou $P = A B C D E$, &c.) Soient les Fluxions de P, A, B, C, D, E , respectivement égales à p, a, b, d, e , &c. $\frac{P}{p}$ sera $= \frac{a}{A} + \frac{b}{B} + \frac{c}{C} + \frac{d}{D}$, &c.

Soit Q égal au produit de tous les facteurs de P , excepté le premier A ; c'est-à-dire, $P = A Q$. Soit R égal au produit de tous les facteurs, excepté les deux premiers A & B , c'est-à-dire, $P = A B R$, ou $Q = B Q$. Soit de même, $R = C S$, $S = D T$, & ainsi de suite. Les Fluxions de Q, R, S, T , &c. étant supposées respectivement égales a, q, x, s, t , &c. il suit, de l'article 708. que $\frac{p}{P} = \frac{a}{A} + \frac{q}{Q} = (\text{parce que } \frac{q}{Q} = \frac{b}{B} + \frac{r}{R}) \frac{a}{A} + \frac{b}{B} + \frac{r}{R} = (\text{parce que } -\frac{r}{R} = \frac{c}{C} + \frac{s}{S}) \frac{a}{A} + \frac{b}{B} + \frac{c}{C} + \frac{s}{S} = (\text{parce que } \frac{s}{S} = \frac{d}{D} + \frac{t}{T}) \frac{a}{A} + \frac{b}{B} + \frac{c}{C} + \frac{d}{D} + \frac{t}{T}$, & ainsi de suite. Donc $\frac{p}{P}$ est égal à la somme des quotiens, ou la Fluxion de chaque facteur de P est divisée par le facteur.

716. Si les facteurs sont égaux entre-eux, & que leur nombre soit $= n$, on aura $P = A^n$, & par la dernière Proposition $\frac{p}{P} = \frac{n a}{A}$. Par conséquent $p = \frac{n P a}{A} = n a A^{n-1}$, comme nous l'avons trouvé, article 712.

717. PROPOSITION V. Si $P = \frac{A B C \times, \&c.}{K L M \times, \&c.}$, & que les Fluxions des quantités respectives soient exprimées par les petites lettres $p, a, b, c, \&c.$ comme ci-devant, on aura $\frac{p}{P} = \frac{a}{A} + \frac{b}{B} + \frac{c}{C} - \frac{k}{K} - \frac{l}{L} - \frac{m}{M}, \&c.$

Car $P K L M, \&c. = A B C \times, \&c.$ Et par l'article 715. $\frac{p}{P} + \frac{k}{K} + \frac{l}{L} + \frac{m}{M}, \&c. = \frac{a}{A} + \frac{b}{B} + \frac{c}{C}, \&c.$ d'où, par transposition, $\frac{p}{P} = \frac{a}{A} + \frac{b}{B} + \frac{c}{C} - \frac{k}{K} - \frac{l}{L} - \frac{m}{M}, \&c.$

718. La Fluxion des logarithmes étant supposée invariable, celles de leurs quantités N & M sont en une proportion que ces quantités elles-mêmes. Car, la propriété fondamentale des logarithmes est, que lorsqu'on les prend en progression arithmétique, les quantités, dont ils sont logarithmes, sont en progression Géométrique. Donc, les logarithmes étant supposés croître, par des différences égales, ces quantités croîtront, ou décroîtront en même proportion que les quantités elles-mêmes. Soient $A - a, A, A + a$ les logarithmes respectifs de $N - n, N, N + n$; & $B - a, B, B + a$ les logarithmes de $M - m, M, M + m$; puisque les logarithmes croissent de la différence constante a , n fera à n , comme N à $N + n$; m à m , comme M à $M + m$ & $n : m :: N + n : M$. Donc, lorsque les quantités & leurs logarithmes croissent ensemble, il suit, de l'article 704. que si la Fluxion constante du logarithme est égale à son incrément a , celle de N ne sera pas plus grande que n , & celle de M ne sera pas moindre que m . Par conséquent la Fluxion de N est à celle de M en une raison qui n'est pas plus grande que celle de n à m , ou de $N + n$ à M . Mais si la Fluxion de N pouvoit être à celle de M , en une raison plus grande que celle de N à M , comme en raison de $N + n$ à M , alors, en supposant n moindre que a , la Fluxion de N seroit à

celle de M , en une raison plus grande que celle de $N + n$ à M . Ce qui étant contradictoire, il suit que la raison de ces Fluxions n'est pas plus grande que celle de N à M . De même, la Fluxion de M est à celle de N en une raison, qui n'est plus grande que celle de M à N . Donc la raison des Fluxions de M & N est la même que celle des quantités M & N . Lorsque les quantités décroissent, pendant que les logarithmes croissent, la démonstration est la même.

719. PROPOSITION VI. *La Fluxion d'une quantité N est à celle de son logarithme, comme N est au module du système logarithmique.*

Car les quantités & leurs logarithmes étant supposées croître, ou décroître en même tems, lorsque la quantité croît, ou décroît en même proportion que son logarithme, elle est alors égale au *module*. Supposons que cette quantité soit M . Puisque la Fluxion de N est à celle de M , comme N est à M , par le dernier article; il suit que celle de N est à celle de son logarithme, comme N est au *module*. Ainsi supposant $N = A^e$, e étant un exposant constant, le logarithme $N = e$, logarithme A ; par conséquent les Fluxions de N & A étant supposées égales à n & a respectivement, $\frac{M n}{N} = \frac{e M a}{A}$, & $n = \frac{e N a}{A} = e A^{e-1} a$. Nous nous sommes assez étendu sur cela dans le Chapitre VI. du Livre I.

720. Lorsque la Fluxion d'une quantité est variable, on peut la considérer comme une fluente, & déterminer la Fluxion (qui se nomme seconde Fluxion de cette quantité) par les Propositions précédentes. Ainsi nous trouvons dans l'article 707. que la Fluxion de A étant supposée $= a$, celle de AA est $= 2Aa$; & si l'on suppose que A croisse uniformément, ou que sa Fluxion a soit invariable, $2Aa$ croîtra par des différences successives égales; & par conséquent sa Fluxion, ou la seconde Fluxion de AA fera égale à l'une de ces différences, (article 701.) comme à $2a(A + a) - 2Aa$, ou $2aa$. Si a est variable, soit sa Fluxion $= z$, celle de $2Aa$ (ou la seconde de AA) fera $2aa + 2Az$, par l'article 708. De même, la Fluxion de A étant constante, celle de $nA^{n-1}a$, ou la seconde Fluxion de A^n est $na(n-1)A^{n-2}a$, ou $n(n-1)A^{n-2}aa$. La Flu-

xion de celle-ci, ou la troisième Fluxion de A^n est $n(n-1)$
 $\overline{n-2} a^3 A^{n-3}$, & la Fluxion de A^n , d'un ordre marqué par
 m , est $n(n-1) \overline{n-2} (n-3)$, &c. $a^m A^{n-m}$, ou les fac-
 teurs, dans le coefficient, doivent être continués jusques à ce
 que leur nombre soit égal à m . Lorsque n est un nombre entier
 positif, la Fluxion de A^n , de l'ordre n , est invariable, & $= n$
 $(n-1) \overline{n-2} \overline{n-3}$, &c. a^n . Les quantités, qui représen-
 tent ces Fluxions de A^n , dépendent de a , qui représente celle
 de A . Lorsque A reste de même valeur, la première Fluxion
 de A^n est plus grande, ou moindre, en même proportion que
 a est supposé plus grand, ou moindre; la seconde Fluxion de
 A^n est en raison doublée de a ; & la Fluxion de m est en rai-
 son de a^m . Si a est variable, mais que z , Fluxion de a , ou se-
 conde Fluxion de A , soit constante, la quatrième Fluxion de
 AA sera constante, & $= 6zz$. Car nous voyons que la secon-
 de Fluxion de AA est $2aa + 2Az$, dont la Fluxion est $4az$
 $+ 2az = 6az$, & la Fluxion de celle-ci est $6zz$. De mê-
 me, la sixième Fluxion de A^3 sera constante, dans ce cas, &
 $= 90z^3$.

721. Les secondes différences d'une quantité B , sont les diffé-
 rences successives de ses premières différences; & comme la Flu-
 xion de B croît, lorsque les différences successives croissent, ainsi
 la seconde Fluxion, ou ses Fluxions, d'un ordre plus élevé, crois-
 sent, lorsque ses secondes, ou plus hautes différences, croissent.
 Si nous arrivons à des différences d'un ordre, qui soient constan-
 tes, la Fluxion, du même ordre, est constante, & s'exprime
 par cette différence. Ainsi lorsque A est supposé croître par des
 différences constantes égales à a , & que sa Fluxion est suppo-
 sée $= a$, la seconde différence de AA (ou $(A+a)^2 - 2AA$
 $+ (A-a)^2$) est $= 2aa$, qui est aussi sa seconde Fluxion; &
 la troisième différence de A^3 est $6Aa^2$, qui est sa troisième Flu-
 xion. Lorsque n est un nombre entier & positif, la Fluxion de
 A^n , de l'ordre n , est égale à celle de l'une de premières différences
 de l'ordre suivant inférieur, ou à la Fluxion de l'une de ses secon-
 des différences de l'ordre $n-2$, & ainsi de suite. Car la Fluxion

de $(A+a)^n - A^n$ (l'une des premières différences de A^n), de l'ordre $n-1$ est $n(n-1)\overline{n-2}$, &c. $((A+a)^{n-n+1} - A) a^{n-1} = n(n-1)\overline{n-2}$, &c. $\times a^n$, ou les coefficients sont supposés continués jusques à ce que leur nombre soit $n-1$. en sorte que le dernier soit 2. Et nous avons trouvé que c'est là la Fluxion de A^n de l'ordre n , dans l'article précédent. De même, la Fluxion de $(A+a)^n - 2A^n + (A-a)^n$ (seconde différence de A^n) de l'ordre $n-2$, est égale à celle de $(A+a)^n - A^n$, de l'ordre $n-1$, & par conséquent à la Fluxion de A^n de l'Ordre n . Ces Fluxions sont invariables & égales aux dernières ou invariables différences. Mais, dans les autres cas, les Fluxions de A^n d'un ordre sont moindres que ses différences suivantes, du même ordre, & plus grandes que les différences précédentes, comme dans l'article 703.

722. Les Propositions précédentes se démontrent brièvement, en cherchant les dernières relations des différences des fluentes; car cela détermine leurs repos respectifs d'accroissement, ou de décroissement, ou la relation de leurs Fluxions. Ainsi, parce que $(A+a)^n - A^n$, incrément de A^n , est moindre que $na(A+a)^{n-1}$, mais plus grand que naA^{n-1} , par l'article 710. & qu'en supposant que a diminue continuellement, jusques à disparaître, la dernière raison de $na(A+a)^{n-1}$ à naA^{n-1} est une raison d'égalité. Il suit, que la dernière raison de l'incrément $(A+a)^n - A^n$ à naA^{n-1} est une raison d'égalité; & que la Fluxion de A étant supposée $=a$, celle de A^n sera naA^{n-1} , comme dans l'article 712. De même, les secondes, ou plus hautes Fluxions de A^n , ou de toute autre fluente, seront à la fin égales aux différences correspondantes de la fluente. Si nous supposons (avec M. Leibnitz, & avec ceux qui ont suivi la Méthode) que a est une différence infiniment petite de A , & que les quantités sont égales lorsque leur différence est infiniment moindre que les quantités elles-mêmes, $na(A+a)^{n-1}$ doit être supposée $=naA^{n-1}$, & puisque

puisque $(A + a)^n - A^n$ différence de A^n ne peut pas être plus grande que la première, ou moindre que la dernière, (article 710.) on doit la supposer $= n a A^{n-1}$.

C H. A P I T R E I I.

*De l'expression des Fluxions. Regles de la Méthode directe
& Regles fondamentales de la Méthode inverse des Fluxions.*

723. **N**EWTON, en quelques occasions*, a représenté les Fluxions par des lettres capitales, & leurs Fluxions, par les petites lettres qui leur correspondent. Nous avons suivi cette expression dans le dernier Chapitre, en démontrant les principes des opérations. Mais il est à propos que les Fluxions soient distinguées des autres expressions Algébriques, en sorte que les secondes & plus hautes Fluxions, puissent, par leur expression, remettre sous les yeux les fluentes originales. Dans sa dernière Méthode, il a représenté les quantités variables, ou fluentes, par les dernières lettres de l'alphabet, comme x, y, z ; leurs premières Fluxions par les mêmes lettres, avec un point, comme $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$; leurs secondes Fluxions par les mêmes, avec deux points, comme par $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$; les troisièmes, par les mêmes, avec trois points, comme $\dddot{x}, \dddot{y}, \dddot{z}$, & ainsi de suite; ou le nombre des points sert à marquer l'ordre de la Fluxion, eu égard à la première fluente; & la différence de ces nombres, marque de quel ordre chacune est la Fluxion de celles qui la précèdent, comme $\ddot{y}$ est la première Fluxion de $\dot{y}$, ou la seconde de y . M. Leibnitz a représenté les différences infiniment petites de x, y, z , par dx, dy, dz ; leurs secondes différences, par ddx, ddy, ddz ; & leurs différences infiniment petites d'un ordre n , par $d^n x, d^n y, d^n z$. Le symbole $\dot{x}$, ou dx , exprime, en général, la Fluxion de x , sans déterminer si elle doit être regardée comme positive, ou négative, c'est-à-

* Princip. Lib. II. Lem. II.

dire, si x doit croître, ou décroître, eu égard aux autres fluentes. Les quantités invariables sont représentées par les premières lettres de l'alphabet, comme a, b, c , &c. Elles n'ont point de Fluxion, & de même, lorsqu'une Fluxion est supposée constante, sa Fluxion disparaît. Newton a renfermé la plupart des regles de la Méthode directe dans une Proposition générale; mais il est plus ordinaire de les représenter séparément, & cela est utile pour aller, par degrés, des cas les plus simples, à ceux qui sont plus composés.

724. I. Lorsqu'il n'entre qu'une seule fluente simple dans chaque terme d'une quantité composée, on trouve la Fluxion de cette quantité en ajoutant les Fluxions de chaque terme, ou en plaçant un point sur chaque fluente. Ainsi la Fluxion de $x + y - z$ est $\dot{x} + \dot{y} - \dot{z}$; celle de $ax + by - cz$ est $a\dot{x} + b\dot{y} - c\dot{z}$. Celle de ax , ou de $ax + bb$ est $a\dot{x}$. Cette regle est facile, & suit de l'article 701. ou des articles 36, 41 & 78.

725. II. Comme la Fluxion de xy est $x\dot{y} + y\dot{x}$, par l'art. 708. & 99.) ainsi celle du produit de deux fluentes est la somme de plusieurs produits, où la Fluxion de chaque facteur est multipliée par l'autre facteur. Ainsi la Fluxion de $(a+x)b-y$ est $\dot{x}(b-y) - \dot{y}(a+x) = \dot{x}b - \dot{x}y - \dot{y}a - \dot{y}x$. Comme la Fluxion de az est $a\dot{z}$, ainsi celle de axy est $a.(x\dot{y} + y\dot{x}) = \dot{x}ya + \dot{y}xa$.

726. III. Comme la Fluxion de la fraction $\frac{x}{y}$ est $\frac{\dot{x}y - y\dot{x}}{yy}$, par l'art. 708. ainsi la fluente de toute fraction se trouve en multipliant la Fluxion du même numérateur, par le dénominateur, retranchant le produit de la Fluxion du dénominateur, multipliée par le numérateur, & directement le reste par le carré du dénominateur. Ainsi la Fluxion de $\frac{a-x}{a+x}$ est $\frac{-\dot{x}(a+x) - \dot{x}(a-x)}{(a+x)^2} = \frac{-2a\dot{x}}{aa + 2ax + xx}$.

727. IV. Comme la Fluxion de $x^{\frac{m}{n}}$ est $\frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} \dot{x}$, par les articles 714 & 719. ainsi la Fluxion d'une puissance, dont

l'exposant est invariable, se trouve en multipliant par l'exposant, retranchant l'unité de cet exposant, & multipliant par la fraction de la racine. Ainsi les Fluxions respectives de x^2 , x^3 , x^4 , &c. sont $2x^{2-1}\dot{x}$, ou $2x\dot{x}$, $3x^{3-1}\dot{x}$, ou $3x^2\dot{x}$, ou $4x^{4-1}\dot{x}$, ou $4x^3\dot{x}$, &c. Pour donner à cette règle toute son étendue, & pour réduire les Fluxions aux plus simples expressions, nous supposerons, par l'Algebre commune, qu'une quantité peut se transporter du numérateur d'une fraction à son dénominateur, ou du dénominateur au numérateur, pourvû que l'on change le signe de son exposant. Ainsi les Fluxions de $\frac{1}{x}$, ou x^{-1} , $\frac{1}{x^2}$, ou x^{-2} , $\frac{1}{x^3}$, ou x^{-3} , sont respectivement $-1.x^{-1-1}\dot{x}$, ou $-\frac{\dot{x}}{x^2}$; $-2x^{-2-1}\dot{x}$, ou $-\frac{2\dot{x}}{x^3}$, $-3x^{-3-1}\dot{x}$, ou $-\frac{3\dot{x}}{x^4}$, & la Fluxion de $\frac{1}{x^n}$, ou x^{-n} est $-n.x^{-n-1}\dot{x}$, ou $-\frac{n\dot{x}}{x^{n+1}}$. Les Fluxions des quantités fourdes se trouvent, en les exprimant comme des puissances, dont les exposans sont fractionnaires. Ainsi la Fluxion de $\sqrt{x}$, ou $x^{\frac{1}{2}}$ est $\frac{1}{2}.x^{\frac{1}{2}-1}\dot{x} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\dot{x} = \frac{\dot{x}}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{\dot{x}}{2\sqrt{x}}$. La Fluxion de $\sqrt[3]{x}$, ou $x^{\frac{1}{3}}$ est $\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}\dot{x} = x^{-\frac{2}{3}}\dot{x} = \frac{\dot{x}}{3x^{\frac{2}{3}}} = \frac{\dot{x}}{3\sqrt[3]{x^2}}$; la Fluxion de $\sqrt[n]{x}$, ou $x^{\frac{1}{n}}$ est $\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}\dot{x} = \frac{\dot{x}}{nx^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{\dot{x}}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$; & la Fluxion de $\frac{1}{\sqrt[n]{x}}$, ou $x^{-\frac{1}{n}}$ est $-\frac{1}{n}x^{-\frac{1}{n}-1}\dot{x} = -\frac{\dot{x}}{nx^{\frac{n+1}{n}}} = -\frac{\dot{x}}{n\sqrt[n]{x^{n+1}}}$. La Fluxion de $(a+x)^n$ est $n(a+x)^{n-1}\dot{x}$, & celle de $\frac{(a+x)^m}{(b+x)^n}$ est $\frac{m(a+x)^{m-1}\dot{x} \cdot (b+x)^n - n(b+x)^{n-1}\dot{x} \cdot (a+x)^m}{(b+x)^{2n}} =$

= (en divisant le numérateur , & le dénominateur par $(b+x)^{n-1}$)

$$\frac{m \dot{x} (b+x) a+x^{m-1} - n \dot{x} (a+x)^m}{(b+x)^{n+1}}.$$

728. V. Comme lorsque $p = x y z u$, &c. ou à ce produit multiplié par une constante K, il suit, de l'article 719. que

$$\frac{\dot{p}}{p} = \frac{\dot{x}}{x} + \frac{\dot{y}}{y} + \frac{\dot{z}}{z} + \frac{\dot{u}}{u}, \text{ \&c. ou que } \dot{p} = \frac{p \dot{x}}{x} + \frac{p \dot{y}}{y} + \frac{p \dot{z}}{z}$$

+ $\frac{p \dot{u}}{u}$, &c. Ainsi la Fluxion d'un produit, divisée par le produit lui-même, est égale à la somme des quotiens de la Fluxion de chaque facteur, divisée par chaque facteur; ou la Fluxion d'un produit est égale à la somme de plusieurs qui sont formées en substituant successivement, dans ce produit, la Fluxion de chaque facteur à la place du facteur lui-même, Ainsi p étant $= x y z$, on a $\dot{p} = \dot{x} y z + \dot{y} x z + \dot{z} x y$.

$$\text{Si } \dot{p} = (a+x) \dot{b+x} (c+x), \text{ on a } \frac{\dot{p}}{p} = \frac{\dot{x}}{a+x} + \frac{\dot{x}}{b+x}$$

$$+ \frac{\dot{x}}{c+x}. \text{ Si } p = (a+x)^m, \frac{\dot{p}}{p} = \frac{m \dot{x}}{a+x}. \text{ Si } p = (a+x)^m$$

$$\dot{b+x}^m \dot{c+x}^r, \frac{\dot{p}}{p} = \frac{m \dot{x}}{a+x} + \frac{n \dot{x}}{b+x} + \frac{x \dot{x}}{c+x}. \text{ Si } p = x +$$

$$\sqrt{x x + 1}, \frac{\dot{p}}{p} = \frac{\dot{x} + \frac{x \dot{x}}{\sqrt{x x + 1}}}{\sqrt{x x + 1}} = \frac{\dot{x} \sqrt{x x + 1} + x \dot{x}}{(x + \sqrt{x x + 1}) \sqrt{x x + 1}} =$$

$$= \frac{\dot{x}}{\sqrt{x x + 1}}. \text{ Donc si } p = \sqrt{p p + 1} = (x + \sqrt{x x + 1})^m, \frac{\dot{p}}{\sqrt{p p + 1}}$$

$$= \frac{m \dot{x}}{\sqrt{x x + 1}}.$$

729. VI. Comme p étant $= \frac{x y z}{s u t}$, &c. il suit, de l'article

$$717. \text{ que } \frac{\dot{p}}{p} = \frac{\dot{x}}{x} + \frac{\dot{y}}{y} + \frac{\dot{z}}{z} - \frac{\dot{s}}{s} - \frac{\dot{u}}{u} - \frac{\dot{t}}{t}, \text{ \&c. ou } \dot{p}$$

$$= \frac{p \dot{x}}{x} + \frac{p \dot{y}}{y} + \frac{p \dot{z}}{z} - \frac{p \dot{s}}{s} - \frac{p \dot{u}}{u} - \frac{p \dot{t}}{t}, \text{ \&c. Ainsi, lorsqu'une fraction est proposée, si l'on divise la Fluxion de chaque facteur du numérateur, par le facteur lui-même, \& si, de la som-$$

me des quotiens, on soustrait les quotiens qui résultent, en divisant la Fluxion de chaque facteur du dénominateur, par ce facteur même, le reste sera la Fluxion de la fraction, divisée par la fraction; ou le reste, multiplié par la fraction, donnera la Fluxion.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } p \text{ étant } &= \frac{a+x}{a-x} \times \frac{b+x}{b-x} \times \frac{c+x}{c-x}, \text{ on aura } \frac{\dot{p}}{p} \\ &= \frac{\dot{x}}{a+x} + \frac{\dot{x}}{a-x} + \frac{\dot{x}}{b+x} + \frac{\dot{x}}{b-x} + \frac{\dot{x}}{c+x} + \frac{\dot{x}}{c-x} \\ &= \frac{2a\dot{x}}{aa-xx} + \frac{2b\dot{x}}{bb-xx} + \frac{2c\dot{x}}{cc-xx}. \end{aligned}$$

730. VII. Une équation de cette forme, $(x-r)\overline{x-s}$, $x-u$, &c. $= 0$ étant proposée, l'équation, pour les Fluxions, sera $(\dot{x}-\dot{r})\overline{\dot{x}-\dot{s}}$, $\dot{x}-\dot{u}$, &c. $= 0$. Car, puisque x doit être $= \dot{r}$, ou à $\dot{s}$, ou à $\dot{u}$, &c. $\dot{x}$ doit être $= \dot{r}$, ou à $\dot{s}$, ou à $\dot{u}$, &c.

731. VIII. Que L représente le logarithme de x , le module étant $= a$, alors comme $\dot{L} = \frac{a\dot{x}}{x}$, par l'article 721. de même, la Fluxion du logarithme d'une quantité se trouve, en divisant la Fluxion de cette quantité, par elle-même, & multipliant par le module. Si $p = x^n$, la Fluxion du logarithme de p est $\frac{a\dot{p}}{p}$, ou $\frac{n a \dot{x}}{x}$. Celle du logarithme de $x^n y^m$ est $\frac{n a \dot{x}}{x}$ $+ \frac{m a \dot{y}}{y}$. Si $p = (a+x)\overline{b+y}$, $c+z$, &c. la Fluxion du logarithme de p est $\frac{a\dot{p}}{p}$, ou (par l'article 728.) $\frac{a\dot{x}}{a+x} + \frac{a\dot{y}}{b+y}$ $+ \frac{a\dot{z}}{c+z}$ &c. Cela suit également de la propriété des logarithmes, que le logarithme du produit est égal à la somme des logarithmes des facteurs, & par conséquent la Fluxion du logarithme de p égale à la somme des Fluxions des logarithmes des facteurs $a+x$, $b+y$, $c+z$, c'est-à-dire, à $\frac{a\dot{x}}{a+x} + \frac{a\dot{y}}{b+y}$

$+ \frac{a\dot{z}}{c+z}$. De même, la Fluxion du logarithme de $\frac{x-a}{x+a}$ est la

différence des Fluxions des logarithmes de $x - a$ & de $x + a$;

& par conséquent $= \frac{a \dot{x}}{x - a} - \frac{a \dot{x}}{x + a} = \frac{2 a a \dot{x}}{x x - a a}$. La Fluxion du logarithme de $\frac{x - a}{x + a} \times \frac{y - b}{y + b}$, &c. est $\frac{2 a a \dot{x}}{x x - a a} + \frac{2 a b \dot{y}}{y y - b b}$.

732. I X. Une quantité qui a un exposant variable, comme y^x , se nomme quantité *exponentielle*, ou *parcourante**; & sa Fluxion est $\frac{\dot{x}}{a} y^x \times \text{logarithme } y + x y^{x-1} \dot{y}$. Car, si l'on suppose

se $y^x = u$, on aura, par les propriétés, des logarithmes (article 157.) $x \text{ logarithme } y = \text{logarithme } u$, & prenant les Fluxions par les articles 725 & 731. $x \text{ logarithme } y + \frac{a \dot{y}}{y} x = \frac{a \dot{u}}{u}$;

par conséquent la Fluxion de y^x , ou $\dot{u} = \frac{u \dot{x}}{a} \text{ logarithme } y$

$+ \frac{\dot{y} x u}{y} = \frac{\dot{x}}{a} y^x \cdot \text{logarithme } y + x y^{x-1} \dot{y}$. On trouvera, de

même, les Fluxions des quantités exponentielles plus élevées.

733. X. La seconde Fluxion se détermine par la première, & celle d'un ordre quelconque, par la Fluxion de l'ordre précédent, avec les mêmes regles. Il est souvent utile de supposer que l'une des quantités variables flue uniformément, ou que sa Fluxion est constante; auquel cas cette quantité n'aura ni seconde, ni plus hautes Fluxions, & les secondes, ou plus hautes Fluxions des quantités, qui dépendent de celle-ci, seront exprimées d'une manière plus simple. Ainsi la Fluxion de x étant supposée constante, la première de x^n étant $n \dot{x} x^{n-1}$, la seconde Fluxion sera $n(n-1) \dot{x}^2 x^{n-2}$, la troisième Fluxion $n(n-1) \frac{n-2}{1} \dot{x}^3 x^{n-3}$; & sa Fluxion, d'un ordre m , sera $n(n-1) \frac{n-2}{1} \frac{n-3}{1} \dots \frac{n-m}{1} \dot{x}^m x^{n-m}$, ou les facteurs, dans le coefficient, doivent être continués jusques à ce que leur nombre soit $= m$.

734. Les secondes, ou plus hautes Fluxions des quantités,

*Actes de Leipzig, 1694.

peuvent se trouver (sans calculer celles des ordres précédens) par des Théorèmes particuliers, comme dans le dernier exemple. Ainsi la Fluxion de xy est $\dot{x}y + \dot{y}x$; la seconde Fluxion de xy est donc $\ddot{x}y + 2\dot{x}\dot{y} + x\ddot{y}$; la troisième Fluxion est $\ddot{x}y + 3\ddot{x}\dot{y} + 3\dot{x}\ddot{y} + x\ddot{\ddot{y}}$, & en général, la Fluxion de xy , d'un ordre marqué par m , se trouve en multipliant la Fluxion de x , de l'ordre m , par y , celle de x , de l'ordre $m-1$, par $\dot{y}$; celle de x , de l'ordre $m-2$, par $\ddot{y}$, & procédant toujours de la même manière, (en diminuant l'ordre de la Fluxion de x , & augmentant celui de la Fluxion de y de l'unité,) ensuite plaçant, devant les différens produits, les coefficients respectifs du binôme $1+1$ élevé à la puissance m ; le dernier terme étant le produit de x , par la Fluxion de y de l'ordre m . Si l'on suppose la Fluxion de x constante, les deux derniers termes donneront celle de xy de l'ordre requis: & si la seconde Fluxion de x est constante, les trois derniers termes donneront celle de xy , & ainsi de suite. Lorsqu'une Fluxion de x , d'un ordre r , & la Fluxion de y , d'un ordre s , sont supposées constantes, la Fluxion de xy , d'un ordre m (supposé que m ne surpasse pas $r+s$) se détermine par ce Théorème.

735. Dans la Méthode inverse, il est question de trouver la fluente, lorsque la Fluxion est donnée, & ses règles sont dérivées de celles de la Méthode directe; comme celles de la division, & de l'extraction des racines en Algebre, sont déduites de celles de la multiplication, & de la formation des puissances. Comme une fluente étant composée d'une partie variable, & d'une autre invariable, la dernière ne paroît pas dans la Fluxion; ainsi une Fluxion étant proposée, on ne peut en dériver que la partie variable de la fluente. Si $\dot{x}$ représente une Fluxion proposée, la partie variable de sa fluente sera $= x$; car supposant que y soit une quantité variable, si $x+y$ pouvoit représenter la fluente de $\dot{x}$, $\dot{x} + \dot{y}$ seroit $= \dot{x}$, & $\dot{y} = 0$, ou y seroit invariable contre la supposition. Mais supposé que K représente une quantité invariable, $x+K$ peut représenter généralement la fluente de $\dot{x}$. S'il est question de trouver une telle fluente de $\dot{x}$, qu'elle s'évanouisse lorsque x disparoît, elle ne

peut être autre que x , & s'il est question que la fluente s'évanouisse lorsque x est égal à une quantité donnée a , alors, en supposant $x + K$ s'évanouir lorsque x devient $= a$, nous avons $a + K = 0$, ou $K = -a$; ainsi la fluente est $x - a$. De même la fluente de $-x$ peut se représenter généralement par $K - x$. Lorsqu'une Fluxion proposée se confond avec une de celles qui ont été déduites de leurs fluentes dans les articles précédens, la partie variable de la fluente requise, doit se confondre avec celle qui y avoit été proposée. Comme la division en Algebre nous conduit aux fractions, & l'extraction des racines, ou l'évolution aux racines sourdes; ainsi la Méthode inverse des Fluxions nous conduit souvent à des quantités, qui ne sont pas connues dans l'Algebre commune, & qui ne peuvent pas s'exprimer par les symboles Algébriques communs. Dans les articles suivans, nous tâcherons de rendre compte des progrès qui ont été faits dans cette Méthode.

736. I. Comme la Fluxion de $ax + by - cz$ est $a\dot{x} + b\dot{y} - c\dot{z}$; ainsi, au contraire, lorsqu'on propose une somme des quantités, dont chacune renferme une simple Fluxion, qui n'est multipliée par aucune fluente, la partie variable de la fluente se trouve, en substituant à la place de chaque Fluxion sa fluente particulière; ou en effaçant les points, ou autres symboles fluxionaires. Ainsi la partie variable de la fluente de $a\dot{x} + b\dot{y} - c\dot{z}$ est $ax + by - cz$. Si l'on veut que cette fluente s'évanouisse lorsque x disparoît, soit alors $y = e$ & $z = f$; la fluente sera $= ax + b(y - e)c - (z - f)$. Car, toute la fluente doit s'exprimer par $ax + by - cz + K$, supposant K invariable. Mais, par la supposition, lorsque x disparoît, cette fluente disparoît, & est égale à $be - cf + K$. Donc $K = -be + cf$, & par conséquent $ax + by - cz + K = ax + by - bc - cz + cf$, ou $= ax + b(y - e)c - (z - f)$.

737. II. Comme la Fluxion de x^n est $nx^{n-1}\dot{x}$, par l'article 727. ainsi, au contraire, lorsque la Fluxion proposée est le produit de quelque puissance, d'une quantité variable, multipliée par sa Fluxion, avec un coefficient invariable, la partie variable de la fluente se trouve, en ajoutant l'unité à l'exposant de la puissance, & divisant par cet exposant ainsi augmenté & par la Fluxion de la racine. Ainsi la partie variable de $nx^{n-1}\dot{x}$ est

est $\frac{n x^{n-1} \dot{x}}{(n-1+1)\dot{x}} = x^n$; & si l'on veut que cette fluente disparoisse avec x , elle est alors précisément $= x^n$; mais si elle doit disparoître lorsque x est égal à une quantité donnée a , la fluente totale est $x^n - a^n$. En général, on peut l'exprimer par $x^n + K$, ou K représente toute quantité invariable. De même, la fluente de $a x \dot{x}$ est $\frac{a x^{1+1} \dot{x}}{2 \dot{x}} + K = \frac{1}{2} a x^2 + K$; celle de $a x^2 \dot{x}$ est $\frac{a x^{2+1} \dot{x}}{3 \dot{x}} + K = \frac{1}{3} a x^3 + K$; celle de $\frac{a \dot{x}}{x^2}$, ou $a x^{-2} \dot{x}$ est $\frac{a x^{-2+1} \dot{x}}{-1 \dot{x}} + K = -\frac{a}{x} + K$. La fluente de $x^{\frac{1}{2}} \dot{x}$ est $\frac{2 x^{\frac{1}{2}+1} \dot{x}}{3 \dot{x}} + K = \frac{2 x^{\frac{3}{2}}}{3} + K$. Celle d'une somme de quantités de cette espèce se trouve, en calculant la fluente de chaque terme séparément. Ainsi la fluente de $x^2 \dot{x} + a x \dot{x} + b b \dot{x}$ est $\frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} a x^2 + b b x + K$; celle de $x \dot{x} (a+x)^2$, ou de $a a x \dot{x} + 2 a x^2 \dot{x} + x^3 \dot{x}$ est $\frac{1}{2} a^2 x^2 + \frac{2 a x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + K$. celle de $x^m \dot{x} (x-a)^n$ lorsque n est un entier, se trouve en élevant $x-a$ à la puissance n , multipliant chaque terme par $x^m \dot{x}$, prenant la fluente de chaque terme séparément, par cette règle, & en faisant une somme. La partie variable de la fluente peut se déterminer dans tous ces cas, à moins que la Fluxion $\frac{\dot{x}}{x}$, ou $\dot{x} x^{-1}$ ne se trouve dans quelqu'un de ses termes. Nous parlerons, dans la suite, de ces cas.

738. III. Comme la Fluxion de xy est $\dot{x}y + y\dot{x}$, par l'article 725. ainsi lorsqu'une Fluxion proposée peut se résoudre en deux termes de cette forme, où il y a deux Fluxions, dont chacune est multipliée séparément par la fluente de l'autre, le produit des deux fluentes est la partie variable de la fluente requise.

Ainsi la fluente de $b \dot{z} - u \dot{z} - a \dot{u} - z \dot{u}$, ou $\dot{z} (b-u) - \dot{u} (a$
Tome II. Z

$+z$) est $(b-u) \dot{a} + \dot{z} + K$. De même, lorsqu'on peut réduire une fraction à trois parties de la forme $\dot{x}yz + \dot{y}xz + \dot{z}xy$, où il y a trois Fluxions $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, & chacune multipliée séparément, par le produit des fluentes des deux autres Fluxions, xyz , produit des trois fluentes, est la partie variable de la fluente requise. On peut aisément continuer ces Théorèmes, par l'article 728.

739. IV. La Fluxion de $e \dot{x}z + \dot{z}x$, où l'on suppose e invariable, n'est pas de la même forme qu'aucune de celles de l'article précédent, mais en la multipliant par x^{e-1} , le produit $e \dot{x}x^{e-1}z + \dot{z}x^e$, se réduit aisément à la première de ces formes. Car, supposant $y = x^e$, $e \dot{x}x^{e-1}z + \dot{z}x^e = \dot{y}z + \dot{z}y$, dont la fluente est yz , ou zx^e , qui est par conséquent la fluente de $(e \dot{x}z + \dot{z}x) x^{e-1}$. De même, si l'on multiplie $e \dot{x}yz + \dot{f}y \dot{x}z + \dot{z}xy$, par $x^{e-1}y^{f-1}$, la fluente du produit sera $x^e y^f z$. Et lorsque la Fluxion $e \dot{x}yz + \dot{f}y \dot{x}z + \dot{g}z \dot{x}y + \dot{u}xyz$ est multipliée par $x^{e-1}y^{f-1}z^{g-1}$, la fluente est $x^e y^f z^g u$, & ainsi de suite. Il suit, de la première de ces formes, que lorsqu'on propose une équation $e \dot{x}z + \dot{z}x = a x^m \dot{x}$, l'équation des fluentes est $zx^e + K = \frac{1}{m+e} a x^{m+e}$, & c'est ainsi que les fluentes, dans l'article 540. ont été trouvées.

740. V. Lorsque $\frac{\dot{p}}{p} + \frac{\dot{x}}{x} + \frac{\dot{y}}{y} + \frac{\dot{z}}{z} + \&c.$ nous pouvons conclure que p est le produit de x , y , z , & quelque quantité invariable K ; car cette quantité Fluxionnelle en dérive (par l'art. 728.) lorsqu'on suppose $p = Kxyz$, &c. Si $\frac{\dot{p}}{p} = \frac{\dot{x}}{x} + \frac{\dot{y}}{y} + \frac{\dot{z}}{z} - \frac{\dot{s}}{s} - \frac{\dot{u}}{u}$, &c. nous pouvons conclure que $p = \frac{Kxyz}{su}$, &c. Ainsi $\frac{\dot{p}}{p}$ étant $= \frac{\dot{x}}{x+a} - \frac{\dot{x}}{x+b}$, nous pouvons conclure $p = K \frac{x+a}{x+b}$. Si $\frac{e \dot{p}}{p} = \frac{m \dot{x}}{x} + \frac{n \dot{y}}{y}$ (e , m & n étant supposées invariables) $p^e = K x^m y^n$.

741. VI. Une Fluxion qui n'est proposée sous aucune des formes précédentes, peut, en quelques cas, par une substitution par-

ticulière, se changer en une Fluxion égale, qui paroîtra sous une ou plusieurs de ces formes; & ainsi la fluente pourra se découvrir. La Fluxion $z^n \dot{z} (a+z)^m$ n'est pas immédiatement comprises sous aucune des formes précédentes, lorsque m est une fraction, ou un nombre négatif. Mais en supposant $x = a+z$, ou $z = x - a$, & par conséquent $\dot{z} = \dot{x}$ & $z^n = (x-a)^n$, la Fluxions proposée devient $x \dot{x}^m (x-a)^n$ dont on trouve la fluente, en élevant $x-a$ à la puissance de l'exposant n , multipliant chaque terme par $x^m \dot{x}$, & calculant la fluente de chaque produit séparément, par l'article 737.

742. La Fluxion $x^m \dot{x} (e+fx^n)^l$ étant proposée; soit $e+fx^n = z$, & $\frac{m+1}{n} = r$, on aura $x^n = \frac{z-e}{f}$, $x^{m+1} = \left(\frac{z-e}{f}\right)^{\frac{m+1}{n}}$
 $\frac{m+1}{n} = \frac{(z-e)^r}{f^r}$, & (en prenant les Fluxions) $(m+1) x^m \dot{x} = \frac{r}{f^r} (z-e)^{r-1} \dot{z}$. Donc la Fluxion proposée sera $= \frac{r}{(m+1)f^r}$

$(z-e)^{r-1} \dot{z} z^l = \frac{\dot{z} z^l}{n f^r} (z-e)^{r-1}$; par conséquent on aura la fluente, en élevant $z-e$ à la puissance de l'exposant $r-1$, multipliant chaque terme de cette puissance, par $\dot{z} z^l$, cherchant la fluente de chaque produit séparément, par l'article 737. & divisant la somme de ces fluentes, par $n f^r$. Cette fluente est assignable en termes finis, lorsque r , ou $\frac{m+1}{n}$ est un entier, (à moins que l ne soit d'une valeur à occasionner l'exception, dont on a fait mention à la fin de l'article 737.) & elle sera composée d'autant de termes qu'il y a d'unités dans r ; parce que tel est le nombre des termes de la puissance de $z-e$, qui a pour exposant $r-1$. Par exemple, la fluente de $x^m \dot{x} (e+fx^2)^l$ est assignable, en termes Algébriques, égaux en nombre à $m+1$, lorsque m est un nombre entier & positif; car, en ce cas, $n=1$, & $r=m+1$. La fluente de $x^m \dot{x} (e+fx^2)^l$ est assignable, en termes finis, lorsque m est un nombre impair positif; parce qu'en ce cas, $n=2$, & $r = \frac{m+1}{n} = \frac{m+1}{2}$, qui est un nombre entier, lorsque m est un nombre impair positif. La Fluxion $x^m \dot{x} \sqrt{e+fx^2} = x^{m+\frac{1}{2}} \dot{x} (e+fx^2)^{\frac{1}{2}}$, & par conséquent sa
 Z ij

fluente est assignable, lorsque $m + \frac{1}{2}$ est un nombre entier positif, c'est-à-dire, lorsque m est égal à une fraction de cette suite, $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \&c.$ La fluente de $\dot{x} \frac{1}{x^r} (e + f x^{\frac{k}{s}})^l$ est assignable, en termes finis, lorsque $s + 1$ est un multiple de k ; car, en ce cas, r (ou $\frac{1}{s} + 1$ divisé par $\frac{k}{s}$) est égal à $\frac{1+r}{k}$ & est un nombre entier lorsque $s + 1$ est un multiple de k .

743. La même Fluxion $x^m \dot{x} (e + f x^n)^l$, en multipliant la première partie $x^m \dot{x}$, par x^{nl} , & divisant l'autre partie $(e + f x^n)^l$ par la même x^{nl} , ce qui ne change pas le produit, s'exprime par $\dot{x} x^{m+nl} (e x^{-n} + f)^l$. Comme la valeur de r , prise de la première expression, étoit $\frac{m+1}{n}$, ainsi sa valeur, calculée par la seconde expression, fera $\frac{m+nl+1}{-n}$. Donc la fluente est assignable en nombre fini de termes Algébriques, non-seulement lorsque $\frac{m+1}{n}$ est un nombre entier & positif, mais, de même, lorsque $\frac{m+nl+1}{-n}$ est un pareil nombre. Ainsi la fluente de $\dot{x} (e + f x^n)^{-k - \frac{1}{n}}$ est assignable en un nombre fini de termes, lorsque k est un nombre entier & positif, quel que soit le nombre représenté par n ; car, en ce cas, $m = 0$, $l = -k$, $-\frac{1}{n} = \frac{-nk-1}{n}$, $nl + 1 = -nk$, & $\frac{m+nl+1}{-n} = \frac{-kn}{-n} = k$.

744. Lorsque la différence ou la somme des deux fluentes est invariable, leurs Fluxions sont égales, comme nous l'avons remarqué dans l'article 735. Ainsi lorsque la même Fluxion est représentée par deux expressions différentes, comme dans les deux articles précédens, il peut y avoir quelque différence entre les fluentes qui en sont dérivées, par les articles précédens; mais par l'addition, ou la soustraction d'une quantité constante, on les trouvera s'accorder l'une avec l'autre. Par exemple, la fluente de $\dot{x} (a + x)^{-2}$ est (par l'article 737.) $\frac{\dot{x}}{x} (a + x)^{-1} = \frac{1}{a+x}$. La même Fluxion est $= x^{-2} \dot{x} (a x^{-2} + 1)^{-2}$, & la fluente de cette Fluxion est (par le même article)

$$\frac{x^{-2} \dot{x} (a x^{-2} + 1)^{-1}}{-a x^{-2} x} = \frac{x^{-1} (a x^{-2} + 1)^{-1}}{-a x^{-2} x}$$

$$= \frac{(ax - 1) - 1}{-a} = \frac{-1}{a(ax - 1 + 1)} = \frac{-1}{a(a+x)}. \text{ La dernière}$$

fluente disparoît, lorsque $x=0$. La première, $\frac{1}{a+x}$ en ajoutant la quantité invariable K , devient $K + \frac{1}{a+x}$, & si l'on suppose que cette fluente disparoît lorsque $x=0$, on a $K + \frac{1}{a+0} = 0$, $K = -\frac{1}{a}$, & la fluente devient $\frac{-1}{a} + \frac{1}{a+x} = \frac{-a-x+a}{a(a+x)} = \frac{-x}{a(a+x)}$, ce qui revient à la seconde fluente.

745. VII. Lorsqu'une fluente ne peut pas se représenter exactement en termes Algébriques, on l'exprime par une suite convergente, ou par une fluente plus simple, qui soit déjà connue. Dans la division de l'Algebre commune, (& dans l'Arithmétique décimale) le quotient est souvent une telle suite. Soit la Fluxion proposée $\frac{ax}{a-x}$; si l'on divise a par $a-x$, selon la Méthode commune, on trouvera le quotient $\frac{a}{a-x} = 1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3}$, &c. ainsi $\frac{ax}{a-x} = x + \frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{a^2} + \frac{x^4}{a^3}$, &c. & la fluente de $\frac{ax}{a-x}$ est égale (en prenant séparément par l'article 737. les fluentes des termes x , $\frac{x^2}{a}$, $\frac{x^3}{a^2}$, &c.) à la suite $x + \frac{x^2}{2a} + \frac{x^3}{3a^2} + \frac{x^4}{4a^3} +$ &c. laquelle peut servir à déterminer la fluente, lorsque x est fort petit par rapport à a ; parce qu'en ce cas, peu de termes, au commencement de la suite, approcheront beaucoup de la valeur totale. Cette suite donne le logarithme de $\frac{aa}{a-x}$, en supposant le module $= a$, par l'article 731. Car, si l'on suppose $\frac{aa}{a-x} = z$, on a $\frac{x}{a-x} = \frac{z}{a}$, par l'article 728. & la fluente de $\frac{ax}{a-x}$ est égale au logarithme z , ou logarithme $\frac{aa}{a-x}$, ou $= -\text{logarithme } a-x$.

$$746. \text{ De même, } \frac{aa+xx}{aa} = 1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} + \frac{x^6}{a^6}, \text{ \&c.}$$

& la fluente de $\frac{a \dot{a} x}{a a + x x}$ est celle de $\dot{x} - \frac{x^2 \dot{x}}{a^2} + \frac{x^4 \dot{x}}{a^4} - \frac{x^6 \dot{x}}{a^6}$,

&c. c'est-à-dire, (par l'article 737.) $x - \frac{x^3}{3 a^2} + \frac{x^5}{5 a^4} - \frac{x^7}{7 a^6}$,

&c. Puisque la Fluxion de l'arc est à celle de la tangente en raison doublée du rayon à la sécante (par l'article 195.) ; il suit, que si le rayon est a , la tangente x , & par conséquent la sécante

$= \sqrt{a a + x x}$, la Fluxion de l'arc sera $= \frac{a \dot{a} x}{a a + x x}$, & l'arc

sera exprimé par la suite, $x - \frac{x^3}{3 a^2} + \frac{x^5}{5 a^4} - \frac{x^7}{7 a^6}$, &c.

ou $x \left(1 - \frac{x^2}{3 a^2} + \frac{x^4}{5 a^4} - \frac{x^6}{7 a^6} \right)$, &c.) M. Jacques Grégory

avoit donné cette suite pour calculer l'arc, par sa tangente, *Commer. Epistol.* 1671. Le Docteur Halley a calculé, par cette suite, le rapport de la circonférence du cercle à son diamètre, en supposant que x est la tangente d'un arc de 30 degrés, auquel cas x est à la sécante $\sqrt{a a + x x}$, comme 1 est à 2, & par conséquent $x : a :: 1 : \sqrt{3}$; enforte que l'arc de 30° est le produit de $\frac{a}{\sqrt{3}}$ par la suite, $1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{45} - \frac{1}{189} + \frac{1}{729}$, &c. &

toute la circonférence est au diamètre, comme $\sqrt{12}$ multiplié, par cette suite, est à l'unité. On peut représenter cette suite par $1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 9} - \frac{1}{7 \cdot 27} + \frac{1}{9 \cdot 81} - \frac{1}{11 \cdot 243}$, &c. afin de faire sentir la manière dont elle est continuée.

747. De même, lorsqu'on extrait les racines des puissances, selon les regles ordinaires de l'Algebre, on exprime souvent la racine, par une suite de cette espece. Ainsi $\sqrt{a a - x x} = a$

$- \frac{x^2}{2 a} - \frac{x^4}{8 a^3} - \frac{x^6}{16 a^5}$, &c. par conséquent $\dot{x} \sqrt{a a - x x} = a \dot{x}$

$- \frac{x^2 \dot{x}}{2 a} - \frac{x^4 \dot{x}}{8 a^3} - \frac{x^6 \dot{x}}{16 a^5}$, &c. Donc la fluente de $\dot{x} \sqrt{a a - x x}$

est (par l'article 737.) $a x - \frac{x^3}{6 a} - \frac{x^5}{40 a^3} - \frac{x^7}{112 a^5} - \frac{x^9}{1152 a^7}$,

Fig. 298.

&c. Et si CA, rayon d'un cercle, est représenté par a , que l'on prenne, sur ce rayon, CP = x , que CB & PM, perpendiculaires à CA, rencontrent le cercle en B & M, l'aire CBMP sera exprimée par cette suite. Car PM² = $a a - x x$, la Fluxion de l'aire CBMP = PM. $\dot{x} = \dot{x} \sqrt{a a - x x}$, & par conséquent l'aire CBMP égale à la fluente. Soit MN, perpendiculaire à CB en N, l'aire BMN = CBMP - CP.PM

$$= \text{C P M P} - x \sqrt{a a - x x} = a x - \frac{x^3}{6 a} - \frac{x^5}{40 a^3} - \frac{x^7}{112 a^5},$$

$$\&c. - a x + \frac{x^3}{2 a} + \frac{x^5}{8 a^3} + \frac{x^7}{16 a^5}, \&c. = \frac{x^3}{3 a} + \frac{x^5}{10 a^3} +$$

$$\frac{3 x^7}{56 a^5}, \&c.$$

Puisque la Fluxion de l'arc BM est à $\dot{x}$ Fluxion de son sinus MN, ou CP, comme CB est à PM, c'est-à-dire, comme a est à $\sqrt{a a - x x}$, la Fluxion de BM sera exprimée

$$\text{par } \frac{a \dot{x}}{\sqrt{a a - x x}} = \frac{a \dot{x} \sqrt{a a - x x}}{a a - x x} = (\text{en divisant, par } a a - x x,$$

$$\text{la suite qui exprime } \sqrt{a a - x x}) \dot{x} + \frac{x^2 \dot{x}}{2 a^2} + \frac{3 x^4 \dot{x}}{8 a^4} + \frac{5 x^6 \dot{x}}{16 a^6}$$

$$+ \&c. \text{ par conséquent l'arc BM est } = x + \frac{x^3}{6 a^2} + \frac{3 x^5}{40 a^4}$$

$$+ \frac{5 x^7}{112 a^6}, \&c. = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2 A}{a^2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{x^2 B}{a^2} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{x^2 C}{a^2}$$

$$+ \&c. \text{ où A représente le premier terme } x, B \text{ le second } \frac{x^2 A}{6 a^2},$$

C le troisième, & ainsi de suite. On représente ordinairement les suites en cette manière, pour pouvoir les continuer à volonté, & trouver les fluentes au degré d'exactitude que l'on peut souhaiter. Que l'arc NS, décrit du centre C, rencontre CM

en S, on aura NS : BM :: CN : CB, c'est-à-dire :: $\sqrt{a a - x x} : a$; par conséquent, si la suite, qui exprime BM, est multipliée

par la suite qui exprime $\frac{\sqrt{a a - x x}}{a}$, c'est-à-dire, $1 - \frac{x^2}{2 a^2}$

$$- \frac{x^4}{8 a^4} - \frac{x^6}{16 a^6}, \&c. \text{ le produit } x - \frac{x^3}{3 a^2} - \frac{2 x^5}{15 a^4} - \frac{8 x^7}{105 a^6},$$

$$\&c. \text{ représentera l'arc NS. Donc MN} - \text{NS} = \frac{x^3}{3 a^2} + \frac{2 x^5}{15 a^4}$$

$$+ \frac{8 x^7}{105 a^6}, \&c. \& \text{ l'aire BMN : CB (MN} - \text{NS) :: } \frac{x^3}{3 a} + \frac{x^5}{10 a^3}$$

$$+ \frac{3 x^7}{56 a^5}, \&c. : \frac{x^3}{3 a} + \frac{2 x^5}{15 a^3} + \frac{8 x^7}{105 a^5}, \&c. \text{ ou :: } 1 + \frac{3 x^2}{10 a^2}$$

$$+ \frac{9 x^4}{56 a^4}, \&c. : 1 + \frac{2 x^2}{5 a^2} + \frac{8 x^4}{35 a^4}, \&c. \text{ Cette raison, en sub-$$

stituant $\frac{c}{a}$ à $\frac{x}{a}$, revient à celle qui a été donnée, sans preuve, dans l'article 655. comme la raison (Fig. 294.) du segment FCO à CD (CF — CS.)

748. Le Théorème du binôme, de Newton, est d'un excellent usage pour extraire les racines des puissances, ou pour réduire une quantité à une suite de cette espèce; & comme nous

n'avons pas employé ce Théorème pour démontrer les regles de la Méthode des Fluxions, nous pouvons en donner le principe, par l'article 727. Qu'il faille trouver $(1+x)^n$, ou n représente un nombre entier, ou fractionnaire, soit qu'il soit positif, ou négatif. Il est évident, par ce qui a été démontré dans l'Algebre commune, sur les puissances & leurs racines, que le premier terme, de toutes les puissances de $1+x$, est 1, & que les termes suivans renferment x , x^2 , x^3 , x^4 , &c. avec des coefficients invariables. Soit, donc $(1+x)^n = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \&c.$ ou $A, B, C, D, \&c.$ représentent ces coefficients. En cherchant les Fluxions (article 727.) $n\dot{x}(1+x)^{n-1} = A\dot{x} + 2Bx\dot{x} + 3Cx^2\dot{x} + 4Dx^3\dot{x} + \&c.$ & divisant par $n\dot{x}$, nous avons $(1+x)^{n-1} = \frac{A}{n} + \frac{2Bx}{n} + \frac{3Cx^2}{n} + \frac{4Dx^3}{n} + \&c.$ & puisque cette équation doit être vraie, quelle que puisse être la valeur de x , il suit, en supposant $x=0$, (ou parce que le premier terme de $(1+x)^{n-1}$ doit être 1.) que $\frac{A}{n} = 1$ & $A = n$. En prenant la Fluxion de la dernière équation $(n-1)\dot{x}(1+x)^{n-2} = \frac{2B\dot{x}}{n} + \frac{6Cx\dot{x}}{n} + \frac{12Dx^2\dot{x}}{n} + \&c.$ & divisant par $(n-1)\dot{x}$, nous avons $(1+x)^{n-2} = \frac{2B}{n(n-1)} + \frac{6Cx}{n(n-1)} + \frac{12Dx^2}{n(n-1)} + \&c.$ & supposant $x=0$ (ou parce que le premier terme de toute puissance de $1+x$ doit être 1) $\frac{2B}{n(n-1)} = 1$, ou $B = n \cdot \frac{n-1}{2}$. En prenant encore les Fluxions, on trouve $(n-2) \times (1+x)^{n-3} \dot{x} = \frac{6C\dot{x}}{n(n-1)} + \frac{24Dx\dot{x}}{n(n-1)}$, &c. & $(1+x)^{n-3} = \frac{6C}{n \cdot n-1 \cdot n-2} + \frac{24Dx}{n \cdot n-1 \cdot n-2} + \&c.$ en sorte que $\frac{6C}{n \cdot n-1 \cdot n-2} = 1$, ou $C = n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3}$; & ainsi de suite. Donc $(1+x)^n = 1 + nx + n \cdot \frac{n-1}{2} x^2 + n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} x^3 + \&c.$ & $(a+b)^n = \frac{(a+b)^n}{a^n} a^n = \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n a^n =$ (en substituant $\frac{b}{a}$ pour x)

$$a^n + \frac{na^n b}{a} + n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{a^n b^2}{a^2} + n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \frac{a^n b^3}{a^3} \\ + \&c. = a^n + na^{n-1}b + n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot a^{n-2}b^2 + n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot a^{n-3}b^3 + \&c. \text{ qui est le Théorème du binome.}$$

749. De même, si l'on suppose $(a + bx + cx^2 + dx^3, \&c.)^n = A + Bx + Cx^2 + Dx^3, \&c.$ en faisant $x=0$, nous avons $A = a^n$. En prenant les Fluxions, & divisant par $\dot{x}$, nous trouverons $(a + bx + cx^2, \&c.)^{n-1} \times (nb + 2ncx + 3ndx, \&c.) = B + 2Cx + 3Dx^2 + \&c.$ & supposant $x=0$, nous avons $B = na^{n-1}b$. Prenant encore les Fluxions, divisant par $2\dot{x}$, & supposant ensuite $x=0$, nous aurons $C = n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot a^{n-2}b^2 + na^{n-1}c$. Et procédant de la même manière, nous trouverons les autres coefficients D, E, &c. du Théorème de M. de Moivre, pour élever un multinome à une puissance, qui a pour exposant n . Le lecteur trouvera un grand détail de cette matière dans les *Transf. Philosoph.* n. 230. ou *Miscel. Analyt.* p. 87. Il y a plusieurs autres Méthodes qu'on a employées pour découvrir ces Théorèmes; mais nous avons préféré celle qui vient immédiatement de la Méthode des Fluxions, & qui sera utile, dans la suite, pour d'autres recherches.

750. Lorsqu'on propose une Fluxion $\dot{x}P$, & que P est une quantité que l'on peut exprimer, par quelques puissances de x , & par des quantités constantes, la valeur de P peut se résoudre en une suite, par ces Théorèmes, & chaque terme étant multiplié par $\dot{x}$, on peut trouver séparément la fluente de chacun, par l'article 737. excepté de ceux qui ont la même forme que $A\dot{x}x^{-1}$. Ainsi, pour trouver la fluente de $x^m\dot{x}(e + fx^n)^l$, on le transformera, en supposant $z = e + fx^n$, en $\frac{\dot{z}z^l}{nf^r} (z - e)^{r-1}$ (comme dans l'article 742.) = (par le Théorème des binomes) $\frac{\dot{z}z^l}{nf^r} z^{r-1} - (r-1)z^{r-2}e + (r-1)\frac{r-2}{2}z^{r-3}e^2 - \&c.)$ par conséquent la fluente est le produit de $\frac{1}{nf^r}$ par

$$\frac{z^{l+r}}{l+r} - \frac{(r-1)}{l+r-1} z^{l+r-1} e + \frac{r-1}{2} \cdot \frac{r-2}{l+r-2} z^{l+r-2} e^2,$$

&c. laquelle (en remettant $e + f x^n$ pour z , supposant $l+r=s$, $rn-n=p$) s'y trouve $= \frac{1}{n s f^r} (e + f x^n)^{l+1} x^p - \frac{r-1}{s-1}$.

$$\frac{eA}{f x^n} + \frac{r-2}{s-2} \cdot \frac{eB}{f x^n} - \frac{r-3}{s-3} \cdot \frac{eC}{f x^n}, \text{ \&c. ou A représente}$$

le premier terme, B le second, C le troisième, & ainsi de suite. Il y a long-tems que Newton a donné cette suite, *Commer. Epist.* & dans son *Traité des quadratures*, il a fait voir comment on pouvoit trouver la fluëtte de $\dot{x}P$ par une suite, lorsque P est le produit de $a + b x^n + c x^{2n}$, &c. par x^m , & par un multiome $e + f x^n + g x^{2n} + h x^{3n}$, &c. élevé à une puissance, dont l'exposant est l ; ou lorsque P est égal au produit de ces quantités multipliées par $k + l x^n + m x^{2n}$, &c. élevées à une puissance, dont l'exposant est k . *De quadrat. curvar.* Prop. V. & VI.

751. Le Théorème suivant est aussi d'un grand usage dans cette théorie. Supposons que y est une quantité que l'on peut exprimer par une suite de cette forme, $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \&c.$ ou A, B, C, &c. représentent des coefficients invariables à l'ordinaire, dont chacun peut être supposé $= 0$. Lorsque z disparoît, soit E la valeur de y , & que $\dot{E}$, $\ddot{E}$, $\ddot{\ddot{E}}$, &c. soient les valeurs respectives de $\dot{y}$, $\ddot{y}$, $\ddot{\ddot{y}}$, &c. z étant supposé fluë uniformément. Je dis que $y = E + \frac{\dot{E}z}{1} + \frac{\ddot{E}z^2}{1.2.z^2} + \frac{\ddot{\ddot{E}}z^3}{1.2.3.z^3}$

$+ \frac{\ddot{\ddot{\ddot{E}}}z^4}{1.2.3.4.z^4} + \&c.$ la loi de cette suite étant manifeste. Car,

puisque $y = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \&c.$ il suit, que z étant $= 0$, A est $= y$; mais (par la supposition) E est alors $= y$; donc $A = E$. En prenant les Fluxions, & divisant par $\dot{z}$, $\frac{\dot{y}}{\dot{z}} = B + 2Cz + 3Dz^2 + \&c.$ & lorsque $z = 0$, $B = \frac{\dot{y}}{\dot{z}}$, c'est-à-dire, à $\frac{\dot{E}}{\dot{z}}$. En prenant encore les Fluxions, & divisant par $\dot{z}$ (qui est supposée invariable) $\frac{\ddot{y}}{\dot{z}^2} = 2C + 6Dz + \&c.$

soit $z = 0$, & substituant $\ddot{E}$ pour $\ddot{y}$, $\frac{\ddot{E}}{z^2} = 2C$, on $C = \frac{\ddot{E}}{2z^2}$.

En prenant encore les Fluxions, & divisant par $\dot{z}$, $\frac{\ddot{y}}{z^3} = 6D$

+ &c. & supposant $z = 0$, nous avons $D = \frac{\ddot{E}}{6z^3}$. Ainsi l'on

voit que $y = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \&c. = E + \frac{\dot{E}z}{z}$

+ $\frac{\ddot{E}z^2}{1.2.z^2} + \frac{\ddot{E}z^3}{1.2.3.z^3} + \frac{\ddot{E}z^4}{1.2.3.4.z^4} + \&c.$ Cette Proposition

peut aussi se tirer du Théorème des binomes. Soit BD l'ordonnée d'une figure FDM en B, égale à E, BP = z, PM = y, cette suite sert à résoudre la valeur de PM, ou y (excepté certains cas particuliers, comme lorsqu'un des coefficients E, $\frac{\dot{E}}{z}$, $\frac{\ddot{E}}{z^2}$, &c. devient infini) en une suite, non-seulement dans

le cas, dont il a été parlé dans les articles précédens, mais encore lorsque la raison de y & z est déterminée par une équation affectée, comme dans plusieurs cas où leur relation est déterminée par une équation fluxionnelle. Ce Théorème a été donné par le Docteur Taylor, *Method. increm.* En supposant que BP représente la Fluxion de z, ou $\dot{z} = z$, nous avons $y = E$

+ $\ddot{E} + \frac{\ddot{E}}{2} + \frac{\ddot{E}}{6} + \frac{\ddot{E}}{24} + \&c.$ (comme on l'a observé dans

l'article 255.) & par là on voit en quelle proportion la Fluxion de y, de chaque ordre, contribue à produire l'incrément, ou

le décrément de y, puisque $y - E = \ddot{E} + \frac{\ddot{E}}{2} + \frac{\ddot{E}}{6} + \frac{\ddot{E}}{24}$

+ &c. Si l'on prend Bp de l'autre côté de B, = BP, alors $pm = A - Bz + Cz^2 - Dz^3 + \&c. =$ (les mêmes quantités étant représentées par $\frac{\dot{E}}{z}$, $\frac{\ddot{E}}{z^2}$, &c. comme auparavant, où

la base étant supposée fluer du même côté,) $E - \frac{\dot{E}z}{z} + \frac{\ddot{E}z^2}{1.2.z^2}$

$$= \frac{\ddot{E} z^3}{1. 2. 3. \dot{z}^3} + \frac{\ddot{\ddot{E}} z^4}{1. 2. 3. 4. \dot{z}^4} + \&c. \text{ par conséquent } PM + pm \\ = 2 E z + \frac{1 \ddot{E} z^2}{1. 2. \dot{z}^2} + \frac{2 \ddot{\ddot{E}} z^4}{1. 2. 3. 4. \dot{z}^4} + \&c.$$

752. L'aire B D P M, ou la fluente de $y z$ est égale à la fluente de $E z + \frac{\dot{E} z \dot{z}}{\dot{z}} + \frac{\ddot{E} z^2 z}{1. 2. \dot{z}^2} + \frac{\ddot{\ddot{E}} z^3 z}{1. 2. 3. \dot{z}^3} + \&c.$ c'est-à-dire, (parce que pendant que l'aire est produite par l'ordonnée P M, les quantités $E, \frac{\dot{E}}{z}, \frac{\ddot{E}}{z^2}, \&c.$ sont invariables) à $E z + \frac{\ddot{E} z^2}{1. 2. \dot{z}} + \frac{\ddot{\ddot{E}} z^3}{1. 2. 3. \dot{z}^2} + \frac{\ddot{\ddot{\ddot{E}}} z^4}{1. 2. 3. 4. \dot{z}^3} + \&c.$ ce Théorème ne diffère pas, quant au fonds, de celui de M. Bernoulli, *Act. Erud. Lips.* 1694. De même, l'aire P M $m p$ terminée, par les ordonnées P M & $p m$, qui sont à égales distances de B D (ou E) des côtés opposés, est $2 E z + \frac{2 \ddot{E} z^3}{1. 2. 3. \dot{z}^2} + \frac{2 \ddot{\ddot{E}} z^5}{1. 2. 3. 4. 5. \dot{z}^4} + \&c.$ & est égale au rectangle sous la base P p, (ou $2 z$) & sous la fluente $\dot{E} + \frac{\ddot{E} z^2}{2. 3. \dot{z}^2} + \frac{\ddot{\ddot{E}} z^4}{2. 3. 4. 5. \dot{z}^4} + \&c.$

753. La suite, pour trouver le nombre d'un logarithme donné, peut se tirer du Théorème de l'article 751. Que z représente le logarithme de y , & M le module; puisque $\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{z}}{M}$, par l'ar. 731. il suit que $\dot{y} = \frac{y \dot{z}}{M}, \ddot{y} = \frac{\dot{y} \dot{z}}{M} = \frac{y \dot{z}^2}{M^2}, \ddot{\ddot{y}} = \frac{\dot{y} \dot{z}^2}{M^2} = \frac{y \dot{z}^3}{M^3}, \ddot{\ddot{\ddot{y}}} = \frac{\dot{y} \dot{z}^3}{M^3} = \frac{y \dot{z}^4}{M^4}, \&c.$ ainsi de suite. Lorsque $z = 0$, on a $y = 1$. Donc nous devons supposer $E = 1, \dot{E} = \frac{\dot{z}}{M}, \ddot{E} = \frac{\dot{z}^2}{M^2}, \ddot{\ddot{E}} = \frac{\dot{z}^3}{M^3}, \ddot{\ddot{\ddot{E}}} = \frac{\dot{z}^4}{M^4}$; par conséquent, selon le Théorème, $y = 1 + \frac{z}{M} + \frac{z^2}{2 M^2} + \frac{z^3}{6 M^3} + \frac{z^4}{24 M^4} + \&c.$ On trou-

ve la même suite, en supposant $y = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \&c.$ & par conséquent $M\dot{y} = y\dot{z} = \dot{z} + Az\dot{z} + Bz^2\dot{z} + Cz^3\dot{z} + \&c.$ Donc, en cherchant les fluentes, My (ou $M + AMz + BMz^2 + CMz^3 + \&c.$) $= K + z + \frac{Az^2}{2} + \frac{Bz^3}{3} + \frac{Cz^4}{4} + \&c.$ & comparant, dans ces deux valeurs de My , les termes qui renferment les mêmes puissances de z , $K = M$, $AM = 1$, ou $A = \frac{1}{M}$, $BM = \frac{A}{2}$, ou $B = \frac{A}{2M}$, $CM = \frac{B}{3}$, ou $C = \frac{B}{3M}$, & ainsi de suite; donc $y = 1 + \frac{z}{M} + \frac{z^2}{2M^2} + \frac{z^3}{6M^3} + \&c.$ en supposant $z = M$, $y = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \&c. = 2.7182818$, &c. la raison de ce nombre à l'unité, est celle que M. Cotes nomme *ratio modularis*, le module étant toujours le logarithme de cette raison dans chaque Système logarithmique. Voyez l'article 175.

754. De même, la suite, pour trouver le cosinus lorsque l'arc est donné, se tire du Théorème de l'article 751. Soit l'arc BM Fig. 258.

$= z$, & son cosinus $PM = y$, puisque $\dot{y} : \dot{z} :: CP : CM :: \sqrt{a^2 - y^2} : a$, $\frac{\dot{y}^2}{z^2} = \frac{a^2 - y^2}{a^2}$, $\frac{z\dot{y}\ddot{y}}{z^2} = \frac{-2y\dot{y}}{a^2}$, ou $\frac{\ddot{y}}{z^2} =$

$= \frac{-y}{a^2}$, $\frac{\dot{y}}{z^2} = \frac{-\dot{y}}{a^2}$, $\frac{\ddot{y}}{z^2} = \frac{-\ddot{y}}{a^2} = \frac{-y\dot{z}^2}{a^4}$, $\frac{\dot{y}}{z^2} = \frac{\dot{y}\dot{z}^2}{a^4}$, &

ainsi de suite. Lorsque l'arc BM disparaît, ou $z = 0$, $PM = CB = a$, supposant donc $E = a$, substituez a pour y dans ces valeurs de $\dot{y}$, $\ddot{y}$, $\ddot{\ddot{y}}$, &c. pour avoir $\dot{E}$, $\ddot{E}$, $\ddot{\ddot{E}}$, &c. & $\frac{\dot{E}}{z}$

$= \frac{a^2 - a^2}{a^2} = 0$, $\frac{\ddot{E}}{z^2} = \frac{-a}{a^2} = \frac{-1}{a}$, $\frac{\ddot{\ddot{E}}}{z^2} = 0$, $\frac{\ddot{\ddot{\ddot{E}}}}{z^4} = \frac{1}{a^3}$,

&c. Donc $y = E + \frac{\dot{E}z}{z} + \frac{\ddot{E}z^2}{2z^2}$, &c. $= a - \frac{z^2}{2a} + \frac{z^4}{24a^3}$

$= \frac{z^6}{720a^5} + \&c.$ Si l'on suppose BM toujours égal à z , mais que son sinus droit MN soit maintenant $= y$, la même équation

$\frac{\dot{y}^2}{z^2} = \frac{a^2 - y^2}{a^2}$ exprimera la relation de $\dot{y}$ à $\dot{z}$, & les valeurs

de $\dot{y}$, $\ddot{y}$, &c. feront les mêmes que dans le premier cas. Mais parce que, lorsque B M disparoît, son sinus M N disparoît aussi, il nous faudra maintenant supposer $E = 0$, & substituer 0 à y

dans les valeurs de $\dot{y}$, $\ddot{y}$, $\dddot{y}$, &c. pour avoir $\dot{E}$, $\ddot{E}$, $\dddot{E}$, &c.

Donc, dans ce cas, $\frac{\dot{E}}{\dot{z}} = \frac{a^2 - 0}{a^2} = 1$, $\ddot{E} = 0$, $\frac{\ddot{E}}{z^3} = \frac{1}{a^2}$,

$\ddot{E} = 0$, &c. & $y = z - \frac{z^3}{6a^2} + \frac{z^5}{120a^4} - \frac{z^7}{5040a^6} + \&c.$

Si y représente la tangente de l'arc z , alors (comme dans l'ar-

ticle 746.) $\frac{\dot{y}}{z} = \frac{a^2 + y^2}{a^2}$, & supposant $E = 0$, (parce que y

disparoît avec z) & procédant comme ci-devant, nous trouve-

rons $y = z + \frac{z^3}{3a^2} + \frac{2z^5}{15a^4} + \frac{17z^7}{315a^6} + \&c.$ Si y représente

la sécante de l'arc z ; $\dot{y} : y :: y\sqrt{yy - aa} : aa$, & supposant $E = a$, parce que la sécante devient égale au rayon lorsque

l'arc disparoît, ou trouvera $y = a + \frac{z^2}{2a} + \frac{1}{24} \frac{z^4}{a^3} + \frac{61}{720} \frac{a^6}{a} + \&c.$

On trouvera, de même, des Théorèmes généraux pour le retour des suites, tels que Newton les a trouvé, *Commerc. Epist.* dans sa Lettre d'Octobre 1676. vers la fin. Nous allons maintenant continuer notre détail sur la Méthode inverse des Fluxions; mais nous aurons occasion de revenir, ci-après, à la Théorie des suites, & de faire mieux sentir l'usage des Théorèmes des articles 751 & 752.



CHAPITRE III.

De l'analogie entre les arcs circulaires & les Logarithmes , & de la maniere d'y réduire les Fluents , ou à des arcs hyperboliques & elliptiques , ou à d'autres Fluents d'une forme plus simple , lorsqu'on ne peut pas les déterminer en termes finis Algébriques.

755. **L**ORSQU'ON ne voit pas qu'une fluente puisse être déterminée par un nombre fini de termes Algébriques, on n'est pas obligé, pour cela, de recourir immédiatement à une suite infinie. Les arcs d'un cercle, & les aires hyperboliques, ou logarithmes, ne peuvent pas s'exprimer en termes Algébriques; mais on les a calculés avec une grande exactitude, par différentes Méthodes. On peut, par leur moyen, mesurer aisément, avec des quantités Algébriques, tous les segmens des sections coniques, & les arcs d'une parabole; & lorsqu'on détermine par là une fluente, on regarde cette détermination comme le second degré de résolution. Lorsqu'il ne paroît pas qu'une fluente puisse se mesurer par les aires des sections coniques, on peut néanmoins, en certains cas, les mesurer par leurs arcs, & c'est-là comme le troisième degré de résolution, s'il ne paroît pas qu'on puisse déterminer une fluente par les arcs d'aucune section conique, (y compris le cercle,) il peut néanmoins être utile de déterminer la fluente par une aire, ou un arc de quelque autre figure que l'on puisse aisément construire, ou décrire; & il est souvent important de réduire la Fluxion proposée à une forme, telle que la suite, pour la fluente ne soit pas trop complexe, & qu'elle ne marche pas trop lentement.

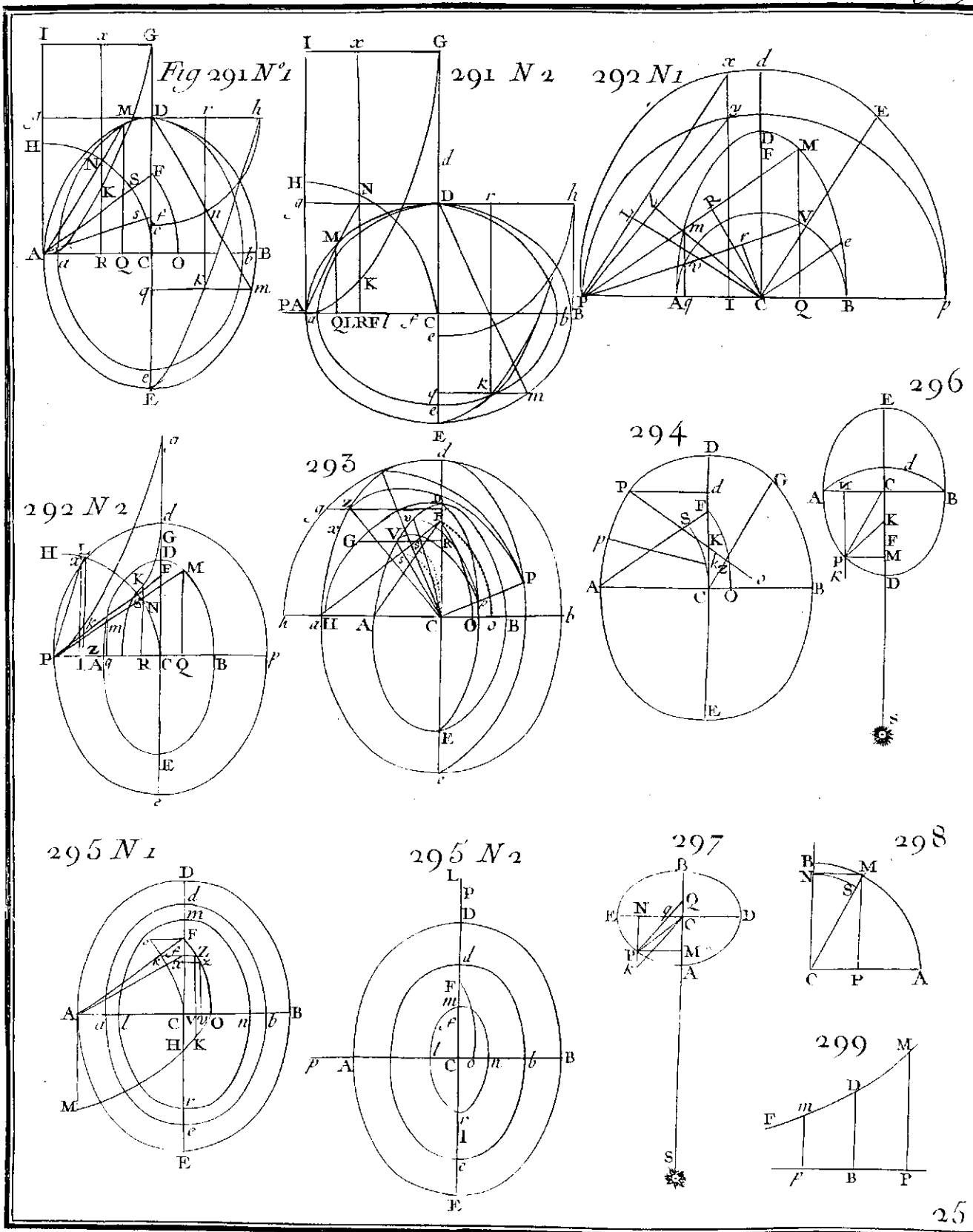
756. La règle de l'article 737. n'est pas utile pour trouver la fluente de $x^{-1} \dot{x}$, ou $\frac{\dot{x}}{x}$; car, selon cette règle, la fluente est $\frac{x \cdot x^{-1+1}}{(1-1) \cdot x} = \frac{x^0}{0} = (\text{parce que } x^0 = x^{1-1} = \frac{x}{x} = 1) \frac{1}{0}$;

de laquelle expression on ne peut pas tirer un calcul de la fluente, & par conséquent ce cas est excepté. Par l'article 731. la fluente de $\frac{\dot{x}}{x}$ est $= \frac{\log. x}{M}$, M étant le module, & la fluente étant supposée disparaître lorsque $x = 1$, ou à la quantité, dont le logarithme $= 0$. Si l'on suppose $x = a \mp z$, alors $\frac{\mp a \dot{x}}{x}$ $= \frac{a \dot{z}}{a \pm z}$, & la fluente se trouvera (comme dans l'article 745.) $= z \mp \frac{z^2}{2a} + \frac{z^3}{3a^2} + \frac{z^4}{4a^3} + \frac{z^5}{5a^4}$, &c. Soit $p = \frac{a+z}{a-z}$, & (article 728.) $\frac{\dot{p}}{p} = \frac{z}{a+z} + \frac{z}{a-z}$; par conséquent la fluente de $\frac{M \dot{p}}{p}$, ou logarithme $p = 2M \left(\frac{z}{a} + \frac{z^3}{3a^3} + \frac{5z^5}{5a^5} + \frac{z^7}{7a^7} + \&c. \right)$ comme dans l'article 173. On trouve, de même, les autres Théorèmes, pour le calcul des logarithmes.

Fig. 300.

757. La fluente de $\frac{\dot{x}}{x}$ est $= AHIE$ aire de l'hyperbole équilatère, AH étant perpendiculaire abaissée du sommet de A, & EI de chaque point E à l'asymptote OH en H & I, supposant $OH = 1$, O étant le centre de la figure; parce que l'ordonnée $EI = \frac{A H \cdot HI}{OI} = \frac{1}{x}$. De-là, vient que l'aire AHIE, ou le secteur AOE se nomme logarithme hyperbolique de OI, ou EI, le module étant supposé $= AH \cdot OH = 1$; & ces logarithmes sont les mêmes que ceux des premières tables de Neper, au lieu que les logarithmes des tables d'aujourd'hui sont égaux à ceux-là, multipliés par le réciproque du logarithme hyperbolique de 10, comme on l'a expliqué, plus au long, dans l'article 174. Si le secteur OAK : OAE :: $n : 1$, & que KL soit perpendiculaire à l'asymptote en L, le logarithme OL $= n$. logarithme OI & OL : OH :: $OI^n : OH^n$.

758. Les propriétés du cercle & de l'ellipse fournissent souvent des propriétés semblables de l'hyperbole; & réciproquement les propriétés des aires hyperboliques (qui se découvrent souvent plus aisément, à cause de leur analogie avec les propriétés des logarithmes, exposées dans le Livre I. Chap. VI.) servent à découvrir les propriétés analogues des aires circulaires & elliptiques. Le Théorème suivant sert à faire voir combien



bien cette analogie est grande, & il nous conduit brièvement à différens Théorèmes généraux, relatifs à la multiplication & à la division des arcs secteurs circulaires. Soit O le centre de l'ellipse, ou de l'hyperbole AEK ; OA l'un des demi-axes de l'ellipse, ou seulement le demi grand axe de l'hyperbole; av l'axe perpendiculaire à OA ; OK un secteur qui est le même multiple du secteur OAB dans les deux figures; Kk & Bb perpendiculaires à av en k & b ; soit $OA = a$, $Bb = x$ & $Kk = z$, lorsque les perpendiculaires Bb , Kk sont du même côté de l'axe av avec OA (comme elles le sont toujours dans l'hyperbole); mais $Bb = -x$, ou $Kk = -z$, lorsque Bb , ou Kk sont de l'autre côté de av dans l'ellipse. Je dis que la relation de z à x sera déterminée, par la même équation, dans les deux figures. Pour le démontrer, soient AOB , BOC , COD , DOE , &c. des secteurs égaux dans l'hyperbole, & soient aussi AOB , BOC , COD , DOE , &c. des secteurs égaux dans l'ellipse; soient Bb , Cc , Dd , Ee , &c. des perpendiculaires à av en b , c , d , e , &c. dans chaque figure. Joignez AC , BD , CE , DF , &c. qui coupent les demi-diamètres OB , OC , OD , OE , &c. en M , N , P , Q , &c. respectivement. Puisque les secteurs AOB , BOC , COD , DOE , &c. sont égaux, AC , BD , CE , DF , &c. sont ordonnées aux demi-diamètres respectifs OB , OC , OD , OE , &c. Par la même raison, OB est à OM , OC à ON , OD à OP , OE à OQ , &c. toujours en même raison de Bb à OA , dans même figure; comme on l'a démontré ci-devant, dans l'ellipse; (Introduction, p. vij & suiv. & §. 617.) & cela s'applique aisément à l'hyperbole. Soient Mm , Nn , Pp , Qq , &c. perpendiculaires au diamètres av dans chaque figure en m , n , p , q , r , &c. respectivement; la raison de Mm à Bb , de Nn à Cc , de Pp à Dd , de Qq à Ee , &c. fera toujours la même que celle de Bb à OA . Puisque AC est divisé également en M , $Cc + OA = 2 Mm = 2 Bb \cdot \frac{Bb}{OA} = 2 Bb \cdot \frac{x}{a}$. Puisque BD est divisé également en N , $Dd + Bb = 2 Nn = 2 Cc \cdot \frac{x}{a}$. De même, $Ee + Cc = 2 Pp = 2 Dd \cdot \frac{x}{a}$, & ainsi de suite. Donc, puisque dans les deux figures, $Cc = 2 Bb \cdot \frac{x}{a} - OA$, $Dd = 2 Cc \cdot \frac{x}{a} - Bb$, $Ee = 2 Dd \cdot \frac{x}{a} - Cc$, & ainsi de suite;

Fig. 300.
& 301.

il est clair que la relation de Cc à Bb , de Dd à Bb , de Ee à Bb , & en général, de Kk à Bb (le secteur OAK étant le même multiple de OAB dans les deux figures) fera toujours exprimée, par la même équation, dans l'ellipse & dans l'hyperbole, lorsque les perpendiculaires Bb & Kk seront du même côté du diamètre av avec OA . Mais si la perpendiculaire Ff (par exemple) est dans l'ellipse de l'autre côté de av , alors $-Ff$ sera déterminée par Bb & OA , dans l'ellipse, par une équation de même forme que celle qui sert à déterminer $+Ff$ par Bb & OA dans l'hyperbole. Car, dans ce cas, nous trouvons dans l'ellipse $Dd - Ff = 2Qq = 2Ee \cdot \frac{x}{a}$, ou $-Ff = 2Ee \cdot \frac{x}{a} - Dd$, & dans l'hyperbole $+Ff = 2Ee \cdot \frac{x}{a} - Dd$. De même, dans l'ellipse $-Gg = 2Ff \cdot \frac{x}{a} - Ee$, & dans l'hyperbole $+Gg = 2Ff \cdot \frac{x}{a} - Ee$. Ainsi $-Ff$, $-Gg$, &c. sont déterminées, dans l'ellipse, par la même équation que $+Ff$, $+Gg$, &c. dans l'hyperbole. Et en général, on voit que $\mp Kk$, ou z est toujours déterminé par $\mp Bb$, ou x , & OA , ou a dans les deux figures, par la même équation.

Fig. 3^{co}.

759. Dans l'hyperbole équilatère, soient BS & KT perpendiculaires au grand axe en S & T , VB & LK à l'asymptote, & rencontrant le même axe en X & Z ; soit le secteur $OAK : OAB :: n+1$, $OX = y$, Bb ou $OS = x$, & Kk , ou $OT = z$ comme ci-devant. Par la propriété ordinaire de cette hyperbole, $BS^2 = OS^2 - OA^2$, c'est-à-dire, $BS = \sqrt{xx - aa}$, & $OX (= y) = OS + SX = OS + BS = x + \sqrt{xx - aa}$. De même, $TK = \sqrt{zz - aa}$. $OZ = OT + TZ = OT + TK = z + \sqrt{zz - aa}$. Puisque le secteur $OAK : AOB :: n : 1$, il suit (article 757.) $OV^n : OH^n (:: OX^n : OA^n) :: OL : OH :: OZ : OA$; c'est-à-dire, $y^n : a^n :: z + \sqrt{zz - aa} : a$, ou $z + \sqrt{zz - aa} = \frac{y^n}{a^{n-1}}$. Puisque $y = x + \sqrt{xx - aa}$, $(y - x)^2 = xx - aa$, ou $yy - 2xy + aa = 0$, & puisque $z + \sqrt{zz - aa} = \frac{y^n}{a^{n-1}}$, il suit que $y^{2n} - 2a^n - 1zy^n + a^{2n} = 0$. Ainsi la relation de z & x se trouve dans l'hyperbole en comparant les deux équations, $y^{2n} - 2a^n - 1zy^n + a^{2n} = 0$,

& $yy - 2xy + aa = 0$, & chassant y . Donc (par le dernier article) si le secteur $OK : OAB$ dans le cercle :: $n : 1$, ou que l'arc $AK = n \cdot AB$ la relation de $\mp Kk$ (cosinus de l'arc AK) $a \mp Bb$ (cosinus de AB) se déterminera, en supposant $\mp Kk = z$, $\mp Bb = x$, $OA = a$, & chassant y des deux équations, $y^{2n} - 2z a^{n-1} y^n + a^{2n} = 0$, & $yy - 2xy + aa = 0$. M. Moivre a fait un excellent usage de ce Théorème, pour réduire un trinôme de la forme $y^{2n} - 2zy^n + 1$ en trinômes quadratiques, (*Miscel. Analyt. Lib. I.*) comme nous verrons ci-après.

Fig. 301.
N. 2.

760. Prolongez SB & TK jusques à la rencontre de l'asymptote en s & t , & $Kt : OA :: Bs^n : OA^n$, c'est-à-dire, $z - \sqrt{zz - aa} : a :: (x - \sqrt{xx - aa})^n : a^n$; par conséquent $z - \sqrt{zz - aa} = a \left(\frac{x - \sqrt{xx - aa}}{a} \right)^n$.

Fig. 300.

Donc, puisque $z + \sqrt{zz - aa} = a \left(\frac{a + \sqrt{xx - aa}}{a} \right)^n$, il suit, (en ajoutant ces équations, que

$$z = \frac{1}{2} a \times \frac{(x + \sqrt{xx - aa})^n + (x - \sqrt{xx - aa})^n}{a^n}, \text{ qui (par le}$$

Théorème des binômes) est $= \frac{1}{a^{n-1}} \text{ par } x^n + n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot x^{n-2}$

$$(xx - aa) + n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \frac{n-3}{4} x^{n-4} (xx - aa)^2$$

+ &c. ou, le rayon a étant supposé $= 1$, élevez $x + 1$ à la puissance de l'exposant n , multipliez les termes, pris alternativement, en commençant par le premier x^n , par 1 , $xx - 1$, $(xx - 1)^2$, $(xx - 1)^3$, &c. respectivement, & la somme des produits fera $= z$. Donc, si Ob , sinus de l'arc AB , est représenté par u , ou $uu = aa - xx$, alors Kk , ou z sera égal au produit de

Fig. 301.

$$\frac{x^n}{a^{n-1}} \text{ par } 1 - n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{uu}{xx} + n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \frac{n-3}{4} \cdot$$

$\frac{u^4}{x^4} - \&c.$ Cela est évident, par ce qui a été démontré, que

$$x \mp \sqrt{xx - aa} = a \left(\frac{z \mp \sqrt{zz - aa}}{a} \right)^{\frac{1}{n}} \& 2 a^{\frac{1-n}{n}} x = (z$$

+ $\sqrt{zz - aa})^{\frac{1}{n}} + (z - \sqrt{zz - aa})^{\frac{1}{n}}$. Soit Ok (sinus de l'arc AK) $= S$, ou $SS = aa - zz =$ (en substituant la va-

Bb ij

leur de z) $\frac{2a^{2n} - (x + \sqrt{xx - aa})^{2n} - (x - \sqrt{xx - aa})^{2n}}{4a^{2n-2}}$; par

conséquent $S = \frac{(x + \sqrt{xx - aa})^n - (x - \sqrt{xx - aa})^n}{n-1} - \sqrt{-1}$,

qui (par le Théorème des binomes) est $= \frac{1}{a^{n-1}}$ par nx^{n-1}

$- n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} x^{n-3} u^3 + \&c.$ La suite, donnée par Newton, pour trouver le sinus de l'arc AK, par le sinus de AB, peut se tirer de ce Théorème, ou de l'article 751.

Fig. 300.
& 301.
N. 2.

761. Que Ar & AR, tangentes de l'hyperbole, ou du cercle en A interceptées par les demi-diamètres OB & OK, soient représentées par t & T; puisque $Bb : Ob :: OA : Ar$, nous aurons, dans l'hyperbole, $x = \frac{aa}{\sqrt{aa - tt}}$ & $\sqrt{xx - aa}$

$= \frac{at}{\sqrt{aa - tt}}$. Mais dans le cercle $x = \frac{aa}{\sqrt{aa + tt}}$ & $\sqrt{xx - aa}$

$= \frac{at\sqrt{-1}}{\sqrt{aa + tt}}$. En substituant ces valeurs de x & $\sqrt{xx - aa}$,

& les valeurs semblables de z & $\sqrt{zz - aa}$ dans la première équation de l'article 759. $z + \sqrt{zz - aa} = a \left(\frac{x + \sqrt{xx - aa}}{a} \right)^n$, que l'on a fait voir être commune aux deux figures, nous avons

dans l'hyperbole $\frac{a+T}{\sqrt{aa - TT}} = \left(\frac{a+t}{\sqrt{aa - tt}} \right)^n$, ou (parce

que $\frac{(a+T)^2}{aa - TT} = \frac{a+T}{a-T} \cdot \frac{a+T}{a-T} = \left(\frac{a+t}{a-t} \right)^n$, & $T = a$.

$\frac{(a+t)^n - (a-t)^n}{(a+t)^n + (a-t)^n}$. Mais dans le cercle $\frac{a + T\sqrt{-1}}{a - T\sqrt{-1}}$

$= \left(\frac{a+t\sqrt{-1}}{a-t\sqrt{-1}} \right)^n$, & $T = \frac{(a+t\sqrt{-1})^n - (a-t\sqrt{-1})^n}{(a+t\sqrt{-1})^n + (a-t\sqrt{-1})^n}$

$=$ (par l'article 748.) $a \cdot \frac{na^{n-1}t - n \cdot \frac{n-1}{2} a^{n-2}t^2 + \&c.}{a^n - n \cdot \frac{n-1}{2} a^{n-2}t^2 + \&c.}$

Ce Théorème a été donné par M. Bernoulli, *Act. Lips.* 1712.

762. Les mêmes Théorèmes se tirent immédiatement de la Méthode inverse des Fluxions, en représentant les arcs circulaires, comme des logarithmes imaginaires; car, de cette manière, on conserve une analogie dans les expressions des fluentes aussi proche, qu'il est possible, de celle qui est entre leurs Fluxions, ou entre les équations du cercle & de l'hyperbole. La Fluxion du secteur hyperbolique OAB, est à celle du triangle OAr, (ou $\frac{1}{2} a \dot{t}$) comme BS² est à Ar², ou :: OS² (= OA² + BS²) : OA², & par conséquent :: OA² : OA² - Ar², c'est-à-dire, :: aa : $aa - tt$; & elle s'exprime par $\frac{1}{2} a \dot{t} \cdot \frac{aa}{aa - tt}$. Celle de OAK est de même

$\frac{1}{2} a \dot{T} \cdot \frac{aa}{aa - TT}$. Donc, puisque OAK = n . OAB, nous avons $\frac{a a \dot{T}}{aa - TT} = \frac{n a a \dot{t}}{aa - tt}$. En supposant $p = a \cdot \frac{a+t}{a-t}$,

nous avons (article 728.) $\frac{\dot{p}}{p} = \frac{\dot{t}}{a+t} + \frac{\dot{t}}{a-t} = \frac{2 a \dot{t}}{aa - tt}$

& $\frac{a a \dot{t}}{aa - tt} = \frac{a \dot{p}}{2 p}$. De même, en supposant $q = a \cdot \frac{a+T}{a-T}$, la

Fluxion $\frac{a a \dot{T}}{aa - TT} = \frac{a \dot{q}}{2 q}$; par conséquent $\frac{a \dot{p}}{2 p} = \frac{n a \dot{q}}{2 q}$, $\frac{\dot{p}}{p} = \frac{n \dot{q}}{q}$, & (art. 738.) $p = q^n$. K, ou K est invariable, ou bien $a \cdot \frac{a+T}{a-T} = a^n K \cdot \left(\frac{a+t}{a-t}\right)^n$, ou (parce T & t disparaissent ensemble, & $a^n K = a$) $\frac{a+T}{a-T} = \left(\frac{a+t}{a-t}\right)^n$ comme dans le dernier

article.

763. De même, la Fluxion de l'arc circulaire AB, qui est $\frac{a a \dot{t}}{a a + t t}$, (article 746.) en supposant $p = a \cdot \frac{a+t\sqrt{-1}}{a-t\sqrt{-1}}$ de-

vient $\frac{a \dot{p}}{2 p \sqrt{-1}}$; parce que (article 728.) $\frac{\dot{p}}{p} = \frac{\dot{t} \sqrt{-1}}{a+t\sqrt{-1}}$

+ $\frac{\dot{t} \sqrt{-1}}{a-t\sqrt{-1}} = \frac{2 a \dot{t} \sqrt{-1}}{a a + t t}$. Donc l'arc circulaire est égal à

la fluente de $\frac{a \dot{p}}{2 p \sqrt{-1}}$, & s'exprime par $\frac{a}{2 M \sqrt{-1}}$. logarith-

me $p = \frac{a}{2 M \sqrt{-1}}$. logarithme $a. \frac{a + t \sqrt{-1}}{a - t \sqrt{-1}}$, ou la valeur

de p est imaginaire, & est tellement composée par le symbole imaginaire $M \sqrt{-1}$, que toute l'expression, composée, peut représenter un arc circulaire; comme ces symboles imaginaires se compensent mutuellement dans les expressions des racines réelles des équations cubiques & plus élevées: voyez l'article

699. De même, la Fluxion de l'arc circulaire AK , ou $\frac{a a \dot{T}}{a a + T T}$,

en supposant $q = a. \frac{a + T \sqrt{-1}}{a - T \sqrt{-1}}$, devient $\frac{a \dot{q}}{2 q}$, & puisque

$\frac{a a \dot{T}}{a a + T T} = \frac{n a a \dot{t}}{a a + t t}$, il suit que $\frac{\dot{q}}{q} = \frac{n \dot{p}}{p}$, $q = p^n. K$, ou $a.$

$\frac{a + T \sqrt{-1}}{a - T \sqrt{-1}} = \left(\frac{a + t \sqrt{-1}}{a - t \sqrt{-1}} \right)^n$, comme dans l'article 761.

parce que $a^n K = a$, T & t disparaissant en même-tems.

764. De même, en supposant, comme ci-devant, $OA = a$, $Bb = x$, $Kk = z$; la Fluxion de l'arc AB (article 747.) est

$\frac{-a \dot{x}}{\sqrt{a a - x x}}$, & celle de AK est $\frac{-a \dot{z}}{\sqrt{a a - z z}}$. Les Fluxions

seront transformées, en supposant $p = x + \sqrt{x x - a a}$, & $q = z + \sqrt{z z - a a}$ (par l'article 728.) en $\frac{a \dot{p}}{p \sqrt{-1}}$ & $\frac{a \dot{q}}{q \sqrt{-1}}$. Donc,

puisque $AK = n. AB$, $\frac{\dot{q}}{q} = \frac{n \dot{p}}{p}$, $q = p^n. K$, ou $z + \sqrt{z z - a a}$

$= (x + \sqrt{x x - a a})^n K =$ (parce que lorsque Bb , ou $x = a$,

alors $z = a$, & par conséquent $a = a^n K$) $a \frac{(x + \sqrt{x x - a a})^n}{a^n}$,

comme nous l'avons trouvé dans l'article 759. & supposant $y = x + \sqrt{x x - a a}$, la relation de z à x se déterminera en extrayant y des équations $y^{2n} - 2x a^{n-1} y^n + a^{2n} = 0$, & $y^2 - 2xy + a^2 = 0$, comme nous l'avons démontré dans l'article 759. sans nous servir des signes imaginaires, en faisant voir que

la relation de z à x doit être déterminée par les mêmes équations, dans le cercle & l'hyperbole.

765. Que la circonférence du cercle soit représentée par C , Fig. 302^a le rayon OA par 1 , l'arc AK par A , & par conséquent AB par $\frac{A}{n}$. Que la circonférence soit divisée en autant de parties égales (en commençant par le point B) BC , CD , DE , EF , FG , GB , qu'il y a d'unités dans n ; alors $AB = \frac{A}{n}$, $AG = BG - AB = \frac{C-A}{n}$, $AC = AB + BC = \frac{C+A}{n}$, $AF = \frac{2C-A}{n}$, $AD = \frac{2C+A}{n}$, & $AE = \frac{3C+A}{n}$. Le cosinus Kk de l'arc AK étant représenté par $\mp z$, comme ci-devant, que les cosinus des autres arcs AB , AG , AC , AF , AD , AE , &c. soient représentés par $\mp a$, $\mp b$, $\mp c$, $\mp d$, $\mp e$, $\mp f$, &c. respectivement, le signe de chaque cosinus étant supposé positif, ou négatif, selon qu'il est du même côté du diamètre au avec OA , ou non. Puisque ces arcs sont en même raison de 1 à n aux autres arcs A , $C-A$, $C+A$, $2C-A$, $2C+A$, $3C-A$, $3C+A$, &c. qui ont tous le même cosinus $Kk = \mp z$, les différentes relations de z à a , z à b , z à c , z à d , &c. se trouveront, en comparant successivement l'équation $y^{2n} - 2zy^n + 1 = 0$, avec les différentes équations quadratiques, $yy - 2ay + 1 = 0$, $yy - 2by + 1 = 0$, $yy - 2cy + 1 = 0$, $yy - 2dy + 1 = 0$, &c. & chassant toujours y . D'où il suit que les trinomes $yy - 2ay + 1$, $yy - 2by + 1$, $yy - 2cy + 1$, $yy - 2dy + 1$, &c. sont diviseurs de $y^{2n} - 2zy^n + 1$, ou que ce dernier est égal au produit de ces trinomes.

766. Sur OA prenez OP pour représenter y , joignez PB , PC , PD , PE , &c. & $PB^2 = Ob^2 + (Bb \pm OP)^2 = Ob^2 + Bb \pm 2Bb.OP + OP^2 = 1 - 2ay + yy$. De même, $PG^2 = 1 - 2by + yy$, $PC^2 = 1 - 2cy + yy$, &c. par conséquent $PB^2.PG^2.PC^2.PF^2.PD^2$, &c. $= y^{2n} - 2zy^n + 1 = y^{2n} \pm 2Kk.y^n + 1$. Soit maintenant l'arc AK , ou A supposé égal à toute la Fig. 303^a circonférence C , alors $BA = \frac{A}{n} = \frac{C}{n} = BG$, & G se confond avec A . En ce cas, le point K tombe sur A , $+z = Kk = OA = 1$, & $PB^2.PA^2.PC^2.PD^2$, &c. $= y^{2n} - 2y^n + 1$, & $PB.PA.PC.PD$, &c. $= y^n - 1$, ou $1 - y^n$. D'où il suit que si

la circonférence est divisée en autant de parties égales en A, B, C, D, &c. qu'il y a d'unités dans n ; si sur OA ($= 1$) vous prenez $OP = y$, & si de P vous menez des droites aux autres points B, C, D, E, F, &c. le produit de toutes ces droites PA. PB. PC. PD, &c. fera $= y^n - 1$, ou $1 - y^n$, c'est-à-dire, à $OP^n - OA^n$, ou $OA^n - OP^n$, selon que OP est plus grand, ou plus petit que OA; ce qui revient à la première partie de l'élégant Théorème inventé par M. Cotes, & rapporté par le Docteur Smith, *Harmon. Mensur.* p. 114. Que le demi-diamètre AO prolongé rencontre le cercle en a, si n est un nombre pair, un des points de la division, supposée de la circonférence, tombera sur a; par conséquent les diviseurs de $1 - y^n$ sont le rectangle APa avec les quarrés des droites PB, PC, &c. qui sont d'un côté de Aa; mais si n est un nombre impair, PA (ou $1 - y$) sera un simple diviseur de $1 - y^n$, & les mêmes quarrés de PB, PC, &c. seront ses autres diviseurs. Supposons maintenant l'arc AK égal à la demi-circonférence, ou à $\frac{1}{2}C$; alors $BA = \frac{A}{n} = \frac{C}{2n} = \frac{1}{2}BG$; & en ce cas, K tombe sur a, Kk, ou $Oa = -1$, ou $z = -1$. Par où l'on voit que si la circonférence est divisée en B, C, D, E, &c. en autant de parties égales qu'il y a d'unités dans n , & si l'une de ces parties BG étant divisée également en A, on joint OA, & que l'on prenne OP sur OA pour représenter y , si de P on mène les droites PB, PC, PD, PE, &c. aux différentes divisions de la circonférence, le produit des quarrés de toutes ces lignes $PB^2. PC^2. PD^2. PE^2$, &c. fera $= y^{2n} + 2zy^n + 1$, & par conséquent $PB. PC. PD. PE$, &c. $= 1 + y^n = OA^n + OP^n$; ce qui revient à la seconde partie du Théorème de M. Cotes. Lorsque n est un nombre pair, le même produit est celui des quarrés de toutes les lignes PB, PC, &c. qui sont du même côté du diamètre Aa; lesquels seront, par conséquent, les diviseurs quadratiques de $1 + y^n$, en ce cas; mais lorsque n est impair, une des divisions de la circonférence tombe sur a, & les mêmes quarrés, avec Pa, ou $1 + y$, sont les diviseurs de $1 + y^n$. En supposant AK égal au quart de cercle, ou à $\frac{1}{4}C$, ou $z = 0$, on voit que la circonférence étant divisée comme ci-devant, si l'on prend l'arc BA sur BG $= \frac{1}{4}BG$, & sur OA, $OP = y$, alors $PB^2. PC^2. PD^2$, &c. $= 1 + y^{2n} = OA^{2n} + OP^{2n}$. Le Lecteur trouvera ce sujet traité d'une différente manière. *Epist. ad amicum de Cotesii inventis.* 1722.

Fig. 303.
N. 2.

Fig. 304.

767. En général, la circonférence étant divisée en un même nombre de parties égales, soit P un point dans le plan du cercle; que OP rencontre la circonférence en A; prenez l'arc AK $= n. AB$, & sur OA prenez OQ : OP :: $OP^{n-1} : OA^{n-1}$; joignez QK; & $PB^2. PC^2. PD^2. PE^2, \&c. = QK^2. OA^{2n-2}$; parce que Kk étant supposé égal à $+z$, ou à $-z$, (selon que Kk est du même côté de av avec OA, ou d'un côté différent,) alors $QK^2 = 1 - 2z. OQ + OQ^2 = 1 - 2zy^n + y^{2n}$. Par ce moyen, M. de Moivre a rendu le Théorème de M. Cotes, plus plus général. De-là, on peut tirer brièvement plusieurs autres Propositions, relatives au cercle. En supposant que OP se confond avec OA, on voit que le produit des cordes, AB. AC. AD. AE, &c. $= AK. OA^{n-1}$. Car, en ce cas, OA, OP & OQ étant égales, $AB^2. AC^2. AD^2. AE^2, \&c. = AK^2. OA^{2n-2}$, & AB. AC. AD, &c. $= AK. OA^{n-1}$. Ce que M. le Marquis de Lhôpital a démontré, d'une différente maniere, dans les sections coniques. *Liv. X. Theor. I. & III.*

768. On peut aussi trouver les diviseurs quadratiques, d'un trinome, par l'Algebre commune. Réduire une quantité comme $y^{2n} - 2zy^n + 1$ à ses diviseurs, c'est un Problème équivalent à la résolution de l'équation $y^{2n} - 2zy^n + 1 = 0$. En procédant comme l'on fait ordinairement dans la résolution des équations quadratiques, $y^{2n} - 2zy^n + zz = zz - 1$, $y^n - z = \pm \sqrt{zz - 1}$, & les diviseurs sont $y^n - z + \sqrt{zz - 1}$, & $y^n - z - \sqrt{zz - 1}$, dont le produit est $y^{2n} - 2zy^n + 1$. Lorsque z est < 1 , $\sqrt{zz - 1}$ est imaginaire, & ces diviseurs renferment des expressions imaginaires. Mais on n'en doit pas conclure qu'on ne puisse pas déterminer, en ce cas, d'autres diviseurs, qui puissent ne renfermer que des quantités réelles. On sçait que $(y-a) \times (y-b) \times (y-c) \times (y-d)$ peuvent se réduire à plusieurs différentes paires de diviseurs quadratiques, comme à $(y-a) \times (y-b)$, & $(y-c) \times (y-d)$, ou à $(y-a) \times (y-c)$, & $(y-b) \times (y-d)$, & quoique les deux premiers puissent renfermer des symboles imaginaires, les autres peuvent ne renfermer que des quantités réelles. Ainsi, en supposant $y^4 - 2zy^2 + 1 = 0$, nous avons $y^2 = z \pm \sqrt{zz - 1}$, ou $z - \sqrt{zz - 1}$, & les quatre diviseurs simples, (en extrayant encore la racine quarrée) sont, en ce cas, $y \pm \sqrt{z + \sqrt{zz - 1}}$, $y - \sqrt{z + \sqrt{zz - 1}}$, $y + \sqrt{z - \sqrt{zz - 1}}$, $y - \sqrt{z - \sqrt{zz - 1}}$.

& $y - \sqrt{z - \sqrt{zz-1}}$. Le produit du premier & du second, donne $yy - z - \sqrt{zz-1}$, & le produit du troisième & du quatrième donnent $yy - z + \sqrt{zz-1}$, qui sont les mêmes diviseurs intermédiaires, d'où les diviseurs simples ont été tirés, & qui renferment tous les deux une quantité imaginaire, lorsque z est moindre que 1; mais le produit du premier & du troisième donne $yy + y(\sqrt{z + \sqrt{zz-1}} + \sqrt{z - \sqrt{zz-1}}) + 1 =$ (parce que le carré de $\sqrt{z + \sqrt{zz-1}} + \sqrt{z - \sqrt{zz-1}}$ est $z + \sqrt{zz-1} + 2 + z - \sqrt{zz-1} = 2 + 2$) $yy + y\sqrt{2z+2} + 1$, ou $yy - y\sqrt{2z-2} + 1$, & le produit du second & du quatrième s'accorde avec ceux-ci. Ainsi nous trouvons $y^4 - 2zy^2 + 1 = (yy + y\sqrt{2z+2} + 1)(yy - y\sqrt{2z-2} + 1)$. Et ces diviseurs peuvent ne point renfermer de quantités imaginaires, quoique z soit supposée négative & moindre que 1. En continuant la résolution jusques à ce que l'on ait des diviseurs simples, & ensuite composant ensemble ces diviseurs de différentes manières, on formera, par ce moyen, des diviseurs quadratiques, dont quelques-uns auront tous leurs coefficients réels, lorsque z est > 1 , & d'autres, lorsque < 1 , & l'on ne doit pas conclure qu'on ne puisse pas assigner des diviseurs quadratiques réels, de ce que ceux d'une combinaison sont imaginaires. On peut aussi trouver les derniers diviseurs quadratiques, en résolvant l'équation $y^4 - 2zy^2 + 1 = 0$, d'une manière un peu différente de la Méthode ordinaire. Car, puisque $y^4 + 1 = 2zy^2$, achevez le carré du premier membre de l'équation, en ajoutant le terme moyen $+ 2y^2$, & vous aurez $y^4 + 2y^2 + 1 = + 2zy^2 + 2y^2$; par conséquent, en extrayant la racine carrée $y^2 + 1 = + y\sqrt{2z+2}$; & les diviseurs quadratiques seront $y^2 - y\sqrt{2z+2} + 1$, & $y^2 + y\sqrt{2z+2} + 1$, comme ci-devant. Par la même Méthode, les diviseurs de $y^{2n} - 2zy^n + 1$ sont $y^n \pm \sqrt{2z+2} \left(\frac{n}{y^2}\right) + 1$, qui peuvent encore se réduire de même, à des divisions de dimensions inférieures; & par une bisection continuelle de l'exposant, lorsque n est une puissance du nombre 2, on peut, à la fin, trouver les divisions quadratiques. Mais cette dernière Méthode ne peut pas servir lorsque n est un autre nombre.

769. Supposant donc $y^{2n} - 2zy^n + 1 = 0$, comme auparavant; & par conséquent $y^n = z + \sqrt{zz-1}$, ou $z = \sqrt{zz-1}$;

on aura, par évolution, ou extraction $y = \sqrt[n]{z + \sqrt{zz-1}}$, ou $\sqrt[n]{z - \sqrt{zz-1}}$; par conséquent deux des diviseurs simples, sont $y = \sqrt[n]{z + \sqrt{zz-1}}$, & $y = \sqrt[n]{z - \sqrt{zz-1}}$, & le diviseur quadratique, qui vient de leur multiplication mutuelle, étant $yy = y \left(\sqrt[n]{z + \sqrt{zz-1}} + \sqrt[n]{z - \sqrt{zz-1}} \right) + 1$: soit le coefficient du terme moyen $= 2x$, ou que ce diviseur quadratique soit $yy = 2xy + 1$, & $2x = \sqrt[n]{z + \sqrt{zz-1}} + \sqrt[n]{z - \sqrt{zz-1}}$: en comparant cette équation avec celle qui a été trouvée dans l'article 759. on verra que, lorsque $z < 1$, si z est toujours le cosinus d'un arc circulaire A , x fera le cosinus d'un arc égal à $\frac{A}{n}$. ou si l'on suppose $z + \sqrt{zz-1} = p$, &

$$z - \sqrt{zz-1} = q, \text{ \& par conséquent } 2z = p + q, x = \frac{\frac{1}{p^n} + \frac{1}{q^n}}{2},$$

$$\sqrt{xx-1} = (\text{parce que } pq = 1) \frac{\frac{1}{p^n} - \frac{1}{q^n}}{2}, x + \sqrt{xx-1}$$

$= \frac{1}{p^n}$, & $x - \sqrt{xx-1} = \frac{1}{q^n}$; en sorte que $2x = (x + \sqrt{xx-1})^n + (\sqrt{xx-1})^n$, la même équation que nous avons trouvé dans l'article 759. pour les cosinus; laquelle étant étendue comme ci-devant, se trouvera toujours convenir avec celles par lesquelles on détermine les relations des cosinus, par les Méthodes ordinaires. Mais il nous faut faire voir comment on mesure les fluentes, ou les aires par les arcs circulaires & logarithmes; & premièrement lorsque les ordonnées sont exprimées par des quantités rationnelles.

770. Qu'il soit requis de trouver la fluente de $\frac{y^n \dot{y}}{y-a}$, n étant un nombre positif entier. On a fait voir, dans l'article 709. que si l'on multiplie $y^n - 1 + y^{n-2}a + y^{n-4}a^2 \dots a^{n-1}$, par $y - a$, le produit fera $y^n - a^n$. Donc $\frac{y^n \dot{y}}{y-a} = y^{n-1} \dot{y}$

$$+ a y^{n-2} \dot{y} + a^2 y^{n-3} \dot{y} \dots + a^{n-1} \dot{y} + \frac{a^n \dot{y}}{y-a}; \text{ par con-}$$

séquent la fluente de $\frac{y^n \dot{y}}{y-a}$ (par les articles 737 & 740.)

est $\frac{y^n}{n} + \frac{a y^{n-1}}{n-1} + \frac{a^2 y^{n-2}}{n-2} \dots + a^{n-1} y + \frac{a^n}{M}$. logarithme $(y - a)$. De même, $y^n - 1 = y^{n-2} a + y^{n-3} a^2 \dots + a^{n-1}$. Donc la fluente de $\frac{y^n \dot{y}}{y + a}$ est $\frac{y^n}{n} - \frac{a y^{n-1}}{n-1} + \frac{a^2 y^{n-2}}{n-2} \dots + \frac{a^n}{M}$. logarithme $(y + a)$.

771. Un nombre entier étant représenté par n , la fluente de $\frac{y^n \dot{y}}{a a + y y}$ s'exprime par un arc circulaire, ou par un logarithme, (avec des quantités Algébriques) selon que n est un nombre pair, ou impair. Car, on voit, comme dans le dernier article, que n étant un nombre pair positif, si $y^n - 2 = a^2 y^{n-4} + a^4 y^{n-6} - a^6 y^{n-8} + \&c.$ est multipliée par $y^2 + a^2$, le produit sera $y^n - a^n$, ou $y^n + a^n$, selon que $\frac{1}{2}n$ est un nombre pair, ou impair. Donc $\frac{y^n \dot{y}}{y y + a a} = y^{n-2} \dot{y} - a^2 y^{n-4} \dot{y} + a^4 y^{n-6} \dot{y} \dots + \frac{a^n \dot{y}}{y y + a a}$; par conséquent, si A représente l'arc dont la tangente est $= y$, le rayon étant $= a$ (enforte que $\dot{A} = \frac{a a \dot{y}}{y y + a a}$, par l'article 744.) la fluente de $\frac{y^n \dot{y}}{y y + a a}$ fera $= \frac{y^n - 1}{n - 1} - \frac{a^2 y^{n-3}}{n - 3} + \frac{a^4 y^{n-5}}{n - 5} \dots + a^{n-2} A$. Lorsque n est un nombre impair positif, supposons-le $= m + 1$, & par ce qui a été démontré, $\frac{y^{m+1} \dot{y}}{y y + a a} = y^{m-1} \dot{y} - y^{m-3} a^2 \dot{y} + y^{m-5} a^4 \dot{y} \dots + \frac{a^{m+1} \dot{y}}{y y + a a}$; dont la fluente (parce que celle de $\frac{y \dot{y}}{a a + y y}$ est $\frac{\log. \sqrt{a a + y y}}{M}$) est $\frac{y^m}{m} - \frac{a^2 y^{m-2}}{m - 2} + \frac{a^4 y^{m-4}}{m - 4} \dots + \frac{a^m}{m}$. logarithme $\sqrt{a a + y y} = \frac{y^n - 1}{n - 1} - \frac{a^2 y^{n-3}}{n - 3} + \frac{a^4 y^{n-5}}{n - 5} \dots + \frac{a^n}{M}$ logarithme $\sqrt{a a + y y}$. En suppo-

fant $y = \frac{a^2}{z}$, $\frac{y^{-n} \dot{y}}{a a + y y}$ se transforme en $-\frac{z^n \dot{z}}{a a + z z} \times \frac{1}{a^2 n}$,

dont la fluente (comme on vient de le faire voir) s'exprime par un arc circulaire, ou par un logarithme, selon que n est un nombre pair, ou impair. En supposant $z = a \frac{y-a}{y+a}$, la Fluxion

$\frac{a a \dot{y}}{y y - a a}$ se transforme en $\frac{a \dot{z}}{z z}$, par l'article 728. & par conséquent la fluente est $\frac{a}{z M}$. logarithme $a \frac{y-a}{y+a}$, & la fluente de

$\frac{y \dot{y}}{y y - a a}$ étant $= \frac{\log. \sqrt{y y - a a}}{M}$, on voit aisément que lorsque

n est un nombre entier, la fluente de $\frac{y^n \dot{y}}{y y - a a}$ s'exprime par logarithmes & quantités Algébriques.

772. Soit $\frac{\dot{y}}{a a + 2 b y + y y} = \dot{Q}$, & qu'il faille trouver la fluente Q . En supposant $y + b = z$, & par conséquent $\dot{y} = \dot{z}$, $y y + 2 b y + a a = z z + a a - b b$ $\dot{Q} = \frac{\dot{z}}{z z + a a - b b}$, & la fluente Q s'exprime par un arc circulaire, ou par un logarithme, selon que a est plus grand, ou moindre que b , par le dernier article, & si $a = b$, la fluente est $-\frac{1}{z} + K$, par l'article 737.

La Fluxion $\frac{y \dot{y}}{a a + 2 b y + y y}$ se transforme en $\frac{z \dot{z} - b \dot{z}}{z z + a a - b b}$, par la même substitution; & l'on peut trouver sa fluente, par le dernier article. Ou, supposant $\sqrt{a a + 2 b y + y y} = u$, puisque

$\frac{y \dot{y} + b \dot{y}}{a a + 2 b y + y y}$ est $= \frac{\dot{u}}{u}$, par l'article 728. il suit que la fluente de

$\frac{y \dot{y}}{a a + 2 b y + y y}$ est $\frac{\log. u}{M} - b Q = \frac{\log. \sqrt{a a + 2 b y + y y}}{M}$

$- b Q$. La fluente de $\frac{y^n \dot{y}}{a a + 2 b y + y y}$ se trouve (lorsque n est

un nombre entier positif) en divisant y^n par $y y + 2 b y + a a$, & continuant l'opération jusques à ce que le reste ait la forme $A y + B$ (ou A & B représentent des coefficients invariables)

multipliant chaque terme par $\dot{y}$, prenez la fluente de chaque produit, par l'article 737. & déterminant celle de $\frac{A y \dot{y} + B \dot{y}}{a a + 2 b y + y y}$

par cet article. La Fluxion de $\frac{y^{-n} \dot{y}}{1 + 2 b y + y y}$ se transforme en

$\frac{-z^n \dot{z}}{1 + 2 b z + z z}$, supposant $y = \frac{1}{z}$, & la fluente se trouve comme

ci-devant. On voit donc que l'ordonnée étant exprimée par une fraction, si le dénominateur est un trinome quadratique $1 + 2 b y + y y$; si le numérateur est composé de termes, qui renferment quelques puissances de y , & des quantités constantes, & si les exposans de ces puissances de y sont des entiers; on peut déterminer la fluente par des arcs circulaires, ou par des logarithmes avec des quantités Algébriques. Et toute Fluxion $P \dot{y}$ étant proposée, si P peut se réduire à un nombre de fractions de cette forme, la fluente de $P \dot{y}$ peut se déterminer de la même manière.

773. Ce qui a été démontré dans les articles 715 & 717. ou dans 728 & 729. sert souvent à réduire une ordonnée à de pareilles fractions. Par exemple, lorsque $p = x y z u \times \&c.$ il suit que $\frac{\dot{p}}{p} = \frac{\dot{x}}{x} + \frac{\dot{y}}{y} + \frac{\dot{z}}{z} + \frac{\dot{u}}{u} + \&c.$ ainsi, en réduisant $1 + y^n$ (supposant que n est un nombre pair) à ses diviseurs quadratiques $1 - 2 a y + y y$, $1 - 2 b y + y y$, $1 - 2 c y + y y$, &c. selon l'article 765. il suit que $\frac{n y^{n-1} \dot{y}}{1 + y^n} = \frac{2 y \dot{y} - 2 a \dot{y}}{1 - 2 a y + y y}$

$+ \frac{2 y \dot{y} - 2 b \dot{y}}{1 - 2 b y + y y} + \frac{2 y \dot{y} - 2 c \dot{y}}{1 - 2 c y + y y} + \&c.$ & par conséquent

$\frac{n y^n}{1 + y^n} = \frac{2 y y - 2 a y}{1 - 2 a y + y y} + \frac{2 y y - 2 b y}{1 - 2 b y + y y} + \frac{2 y y - 2 c y}{1 - 2 c y + y y}$

$+ \&c. =$ (parce que $\frac{2 y y - 2 a y}{1 - 2 a y + y y} = \frac{2 y y - 4 a y + 2 + 2 a y - 2}{1 - 2 a y + y y}$

$= 2 + \frac{2 a y - 2}{1 - 2 a y + y y}$) $n + \frac{2 a y - 2}{1 - 2 a y + y y} + \frac{2 b y - 2}{1 - 2 b y + y y}$

$+ \frac{2 c y - 2}{1 - 2 c y + y y} + \&c.$ enforte que la fluente de $\frac{y^n \dot{y}}{1 + y^n}$ est

égale à y ajouté aux fluentes des différentes Fluxions $\frac{2ay-2}{1-2ay+yy} \cdot \frac{\dot{y}}{n}$, $\frac{2by-2}{1-2by+yy} \cdot \frac{\dot{y}}{n}$, &c. qui se trouveront par le dernier article.

774. La même Méthode sert à trouver brièvement les quatre premières Propositions de M. de Moivres, *Miscel. Analyt. Lib. I.* Supposons, premierement, que n soit un nombre pair ; puisque $1+y^n = (1-2ay+yy) \times (1-2by+yy) \times (1-2cy+yy) \times \&c.$ il suit, en divisant $1+y^n$ par y^n , & chaque diviseur quadratique par yy , que $\frac{1+y^n}{y^n} = (1-2ay^{-1}+y^{-2})$

$\times (1-2by^{-1}+y^{-2}) \times \&c.$ Donc, comme lorsque $\frac{P}{Q} = xyzn \times \&c.$ $\frac{\dot{P}}{P} - \frac{\dot{Q}}{Q} = \frac{\dot{x}}{x} + \frac{\dot{y}}{y} + \frac{\dot{z}}{z} + \&c.$ (par l'article 728.)

ainsi, dans ce cas, $\frac{ny^{n-1}\dot{y}}{1+y^n} - \frac{n\dot{y}}{y} \left(= \frac{-n\dot{y}}{1+y^n} \times \frac{1}{y} \right)$
 $= \frac{2ay^{-2}\dot{y}-2y^{-3}\dot{y}}{1-2ay^{-1}+y^{-2}} + \frac{2by^{-2}\dot{y}-2y^{-3}\dot{y}}{1-2by^{-1}+y^{-2}} + \&c.$ ou (divi-

sant les deux membres par $-y^{-1}\dot{y}$) $\frac{n}{1+y^n} = \frac{2-2ay}{1-2ay+yy}$
 $+ \frac{2-2by}{1-2by+yy} + \frac{2-2cy}{1-2cy+yy}$; ce qui est la première de

ces Propositions. Lorsque n est un nombre impair, alors, outre les diviseurs quadratiques de $1+y^n$ (qui, selon l'article 766. sont PB^2 , PC^2 , PD^2 , &c.) il y a un simple diviseur $Pa=1+y$, Fig. 304.

& l'on voit que, dans ce cas, $\frac{n}{1+y^n} = \frac{1}{1+y} + \frac{2-2ay}{1-2ay+yy}$

$+ \frac{2-2by}{1-2by+yy} + \&c.$ Lorsque n est un nombre pair, le rectangle APa , ou $1-yy$ est un des diviseurs de $1-y^n$, (par l'article 766.) & les autres diviseurs quadratiques PB^2 , PC^2 , PD^2 , &c. étant exprimés par $1-2ay+yy$, $1-2by+yy$, &c. comme auparavant, on voit, de même, que, dans ce cas,

$\frac{n}{1-y^n} = \frac{2}{1-yy} + \frac{2-2ay}{1-2ay+yy} + \frac{2-2by}{1-2by+yy} + \&c.$

& lorsque n est impair, PA, ou $1 - y$ étant un des diviseurs de $1 - y^n$, (par l'article 766.) nous trouverons, de même,

$$\text{que } \frac{y^n}{1 - y^n} = \frac{1}{1 - y} + \frac{z - 2ay}{1 - 2ay + yy} + \frac{z - 2by}{1 - 2by + yy}$$

+ &c. l'ordonnée $\frac{1}{1 + y^n}$ étant réduite, de cette manière ;

en fraction, avec les dénominateurs quadratiques, l'aire, ou la fluente de $\frac{y}{1 + y^n}$ (& par conséquent de $\frac{y^m}{1 + y^n}$ lorsque m

est un nombre entier) se réduit aux arcs circulaires, ou aux logarithmes avec des quantités Algébriques, par l'article 772.

L'ordonnée $\frac{1}{e + fy^n + gy^{2n}}$ se réduit en fractions de la même

espèce, par cette Méthode, lorsque ff est plus grand que $4eg$, c'est-à-dire, lorsque les racines de l'équation quadrati-

que $y^{2n} + \frac{fy^n}{g} + \frac{e}{g} = 0$ sont réelles. Car, supposant que

ces racines sont $-R^n$ & $-r^n$, ou $e + fy^n + gy^{2n} = g(y^n + R^n)$

$\times (y^n + r^n)$: soient $y^n + R^n$ & $y^n + r^n$ réduits à leurs diviseurs respectifs (article 766.) $RR - 2Ay + yy$, &c. & $rr - 2ay$

+ yy , &c. & par ce qui a été démontré $\frac{y^n}{r^n + y^n} = \frac{r^n}{R^n + y^n}$,

$$\text{ou } \frac{R^n - r^n}{e + fy^n + gy^{2n}} \times ng = \frac{1}{r^n} \times \left(\frac{2rr - 2ay}{rr - 2ay + yy} \right) + \&c.$$

$$- \frac{1}{R^n} \times \left(\frac{2RR - 2Ay}{RR - 2Ay + yy} \right) - \&c.$$

775. Lorsque z est moindre que 1, soit $y^{2n} - 2zy^n + 1$, réduit (par l'article 766.) à ses diviseurs $1 - 2ay + yy$, $1 - 2by + yy$, &c. alors (z étant supposé invariable,) il suit, comme dans l'article 728. que

$$\frac{ny^{2n-1} - nzy^{n-1}}{y^{2n} - 2zy^n + 1} = \frac{y-a}{1 - 2ay + yy} + \frac{y-b}{1 - 2by + yy} + \&c.$$

$$\text{ou (multipliant par } \frac{z}{y^n - 1}) \frac{ny^m - nzz}{y^{2n} - 2zy^n + 1} = \frac{y-a}{1 - 2ay + yy}$$

$$\times \frac{z}{y^n - 1} + \frac{y-b}{1 - 2by + yy} \times \frac{z}{y^n - 1} + \&c. \text{ Puisque } \frac{y^{2n} - 2zy^n + 1}{y^{2n}} = (1$$

$(-2ay^{-1} + y^{-2}) \times (1 - 2by^{-1} + y^{-2}) \times \&c.$ il suit (comme dans l'article 728.) que $\frac{n - nzy^n}{y^{2n} - 2zy^n + 1} = \frac{1 - ay}{1 - 2ay + yy}$

$+ \frac{1 - by}{1 - 2by + yy} + \&c.$ La somme de ces équations donne

$$\frac{n - nzz}{y^{2n} - 2zy^n + 1} = \frac{(y-a)zy^{-n+1} + 1 - ay}{1 - 2ay + yy} + \frac{(y-b)zy^{-n+1} + 1 - by}{1 - 2by + yy}$$

$+ \&c.$ & il suit de l'article 772. que la fluente de $\frac{\dot{y}}{y^{2n} - 2zy^n + 1}$

est déterminable par les arcs circulaires, & par les logarithmes avec les quantités Algébriques.

776. Par une application semblable de ce qu'on a démontré dans l'article 728. si l'on suppose $xx - Ax + B = (x - a) \times (x - b)$, la fraction $\frac{\dot{x}}{xx - Ax + B}$ se réduit à des fractions qui

auront les diviseurs simples $x - a$, $x - b$ pour leurs dénominateurs respectifs avec des coefficients invariables. Car, puisque $xx - Ax + B = (x - a) \times (x - b)$, il suit (article 728.) que

$$\frac{2x\dot{x} - A\dot{x}}{xx - Ax + B} = \frac{\dot{x}}{x - a} + \frac{\dot{x}}{x - b}; \text{ \& puisque } 1 - Ax^{-1} +$$

$$+ Bx^{-2} = (1 - ax^{-1}) \times (1 - bx^{-2}) \text{ il suit que } \frac{Ax\dot{x} - 2B\dot{x}}{xx - Ax + B}$$

$$= \frac{a\dot{x}}{x - a} + \frac{b\dot{x}}{x - b}. \text{ De ces deux équations il résulte}$$

$$\times \frac{\dot{x}}{xx - Ax + B} = \frac{\frac{1}{2}A - a}{2B - \frac{1}{2}AA} \times \frac{\dot{x}}{x - a} + \frac{\frac{1}{2}A - b}{2B - \frac{1}{2}AA} \times \frac{\dot{x}}{x - b}$$

$=$ (parce que $A = a + b$, $B = ab$, par les propriétés connues des

$$\text{équations } \frac{1}{a - b} \times \frac{\dot{x}}{x - a} + \frac{1}{b - a} \times \frac{\dot{x}}{x - b}. \text{ Ainsi } \frac{1}{xx - Ax + B}$$

$$= \frac{1}{a - b} \times \frac{1}{x - a} + \frac{1}{b - a} \times \frac{1}{x - b}. \text{ Donc, si } x^3 - Ax^2$$

$$+ Bx - C = (x - a) \times (x - b) \times (x - c), \text{ il suit que } \frac{1}{x^3 - Ax^2 + Bx - C} = \frac{1}{(x - a) \times (x - b)} \times \frac{1}{x - c} = (\text{par ce qui}$$

$$\text{a été démontré}) \frac{1}{(a - b) \times (x - a) \times (x - c)} + \frac{1}{(b - a) \times (x - b) \times (x - c)}$$

$$= (\text{en réduisant chacune de ces dernières fractions de la même manière}) \frac{1}{(a - b) \times (a - c) \times (x - a)} + \frac{1}{(a - b) \times (c - a) \times (x - c)}$$

$$+ \frac{1}{(b-a) \times (b-c) \times (x-b)} + \frac{1}{(b-a) \times (c-b) \times (x-c)} = \frac{1}{(a-b) \times (a-c) \times (x-a)}$$

$$+ \frac{1}{(b-a) \times (b-c) \times (x-b)} + \frac{1}{(b-a) \times (c-b) \times (x-c)}.$$

La continuation de ces Théorèmes est évidente, le coefficient de $x-b$, par exemple, étant toujours le produit des différences $b-a$, $b-c$, &c. par lesquelles la racine b surpasse les autres racines de l'équation $(x-a) \times (x-b) \times (x-c) \times \&c. = 0$. Ce sujet a été traité par M. Leibnitz, *Act. Lips.* 1702. & M. de Moivre, *Phil. Transf. N.* 373. &c.

777. Mais ces fractions se découvrent brièvement, de la manière suivante. Soit $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \&c. = (x-a) \times (x-b) \times (x-c) \times (x-d) \times \&c.$ & que P représente ce produit; que Q représente celui de tous les diviseurs simples, excepté le premier $x-a$; c'est-à-dire, soit $Q = (x-b) \times (x-c) \times (x-d) \times \&c.$ Soient $a, b, c, d, \&c.$ inégales, & r étant un nombre entier positif moindre que n , soit $\frac{x^r}{P}$, ou

$$\frac{x^r}{x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - \&c.} = \frac{L}{x-a} + \frac{M}{x-b} + \frac{N}{x-c}$$

+ &c. ou L, M, N, &c. représentent les coefficients invariables, qu'il faut déterminer. En réduisant ces fractions à un dénominateur commun, & multipliant par P, ou $(x-a) \times (x-b) \times (x-c) \times \&c.$ nous avons $x^r = LQ + MQ \cdot \frac{x-a}{x-b} + NQ \cdot \frac{x-a}{x-c} + \&c.$

Ensuite supposant $x=a$, ou $x-a=0$, nous trouvons que x^r (c'est-à-dire, en ce cas, a^r) est $= LQ$, ou que $a^r = L \cdot (a-b) \times (a-c) \times (a-d) \times \&c.$ & $L = \frac{a^r}{(a-b) \times (a-c) \times (a-d) \times \&c.}$ De même, en supposant $x=b$,

nous trouvons $M = \frac{b^r}{(b-a) \times (b-c) \times (b-d) \times \&c.}$ Les autres

coefficients des fractions auxquelles $\frac{x^r}{P}$ doit se réduire, sont exprimées par des valeurs semblables.

778. Puisque $P = Q(x-a)$, il suit que $\dot{P} = \dot{Q}(x-a) + x\dot{Q}$, & lorsque $x=a$, $\dot{P} = a\dot{Q}$, ou $\dot{Q}$ (qui, en ce cas,

$$\text{est} = (a - b) \times (a - c) \times (a - d) \times \&c. = \frac{\dot{P}}{x} \\ = n a^{n-1} - (n-1) A a^{n-2} + (n-2) B a^{n-3} - \&c.$$

$$\text{Donc } L = \frac{a^r}{Q} = \frac{a^r}{n a^{n-1} - (n-1) A a^{n-2} + (n-2) B a^{n-3} - \&c.}$$

$$\text{De même, } M = \frac{b^r}{n b^{n-1} - (n-1) A b^{n-2} + (n-2) B b^{n-3} - \&c.},$$

& les autres valeurs des coefficients sont semblables. La règle, pour trouver le coefficient dans chacune de ces fractions (comme dans $\frac{N}{x-c}$) auxquelles $\frac{x^r}{x^n - A x^{n-1} + B x^{n-2} - \&c.}$, doit se

réduire, est celle-ci. Substitués c pour x dans le numérateur x^r , prenez la Fluxion du dénominateur, divisez-la par x , & substituez c pour x , vous aurez le dénominateur de la valeur de N .

779. Qu'il faille réduire $\frac{x^r}{x^{2n} - A x^{2n-1} + B x^{2n-2} - \&c.}$ en

fractions qui aient des dénominateurs quadratiques, r étant supposé un nombre entier & positif moindre que $2n$, & que le dénominateur (P) soit le produit des diviseurs quadratiques $xx - 2ax + gg$, $xx - 2bx + hh$, $xx - 2cx + kk$, &c.

$$\text{soit } \frac{x^r}{P} = \frac{L - lx}{xx - 2ax + gg} + \frac{N - mx}{xx - 2bx + hh} + \frac{N - nx}{xx - 2cx + kk}$$

+ &c. Que Q représente le produit de tous les diviseurs quadratiques excepté le premier, $xx - 2ax + gg$; c'est-à-dire, soit $P = (xx - 2ax + gg) Q$. En réduisant les fractions à un dénominateur commun, $(L - lx) Q + (M - mx) Q$.

$$\frac{xx - 2ax + gg}{xx - 2bx + hh} + (N - nx) Q \cdot \frac{xx - 2ax + gg}{xx - 2cx + kk} + \&c. = x^r.$$

Soient e & f les racines de l'équation, $xx - 2ax + gg = 0$, M la valeur de Q lorsque $x = e$, & N sa valeur lorsque $x = f$. En substituant e pour x , $xx - 2ax + gg$, & tous les termes qui en sont multipliés disparaissent; par conséquent $(L - le) M = e^r$. De même, en substituant f pour x , $(L - lf) N = f^r$.

$$\text{Donc } L = \frac{e^r f}{M(f - e)} - \frac{f^r e}{N(f - e)} = (\text{parce que } ef = gg)$$

$\frac{gg}{f-e} \left(\frac{e^{r-1}}{M} - \frac{f^{r-1}}{N} \right)$. Puisque $P = (xx - 2ax + gg) \times Q$, il suit (en prenant les Fluxions) que $\dot{P} = (2x - 2a) Q \dot{x} + \dot{Q} (xx - 2ax + gg)$, & substituant e pour x , $\frac{\dot{P}}{\dot{x}}$ (qui, dans ce cas, est $2ne^{2n-1} - (2n-1)Ae^{2n-2} + (2n-2)Be^{2n-3} - \&c.$) $= (2e-a)M =$ (parce que $e+f=2a$, & $e-f+2e-2a=e-f$). M . De même, $N(f-e) = 2nf^{2n-1} - (2n-1)Af^{2n-2} + \&c.$ Donc $L = \frac{ggf^{r-1}}{2nf^{2n-1} - (2n-1)Af^{2n-2} + \&c.}$

$-\frac{gg e^{r-1}}{2ne^{2n-1} - (2n-1)Ae^{2n-2} + \&c.}$. Et de même, nous trouverons $l = \frac{-e^r}{M(e-f)} - \frac{f^r}{N(f-e)} = \frac{-e^r}{2ne^{2n-1} - (2n-1)Ae^{2n-2} + \&c.} - \frac{f^r}{2nf^{2n-1} - (2n-1)Af^{2n-2} + \&c.}$. Les valeurs des coefficients M & m , N & n , &c. sont semblables.

780. Soient gg , hh , kk , &c. les derniers termes des diviseurs quadratiques, tous égaux l'un à l'autre & à l'unité. Alors $M = (ee - 2be + 1)(ee - 2ce + 1)(ee - 2de + 1) =$ (parce que $ec - 2ac + 1 = 0$ & $ee + 1 = 2ae$) $2ae - 2be \times 2ae - 2ce \times 2ae - 2de \times \&c. = e^{n-1}(2a-2b)(2a-2c)(2a-2d) \times \&c.$ De même, $N = f^{n-1}(2a-2b)(2a-2c)(2a-2d) \times \&c.$ Donc, si I représente le produit des différences par lesquelles $2a$, coefficient moyen du premier diviseur, surpasse $2b$, $2c$, $2d$, &c. coefficients moyens des autres diviseurs; on aura $M = e^{n-1}I$, & $N = f^{n-1}I$. Donc, en substituant ces expressions pour M & N dans les valeurs de L & l au dernier article, $L = \frac{e^{n-r} - f^{n-r}}{I(e-f)}$, lorsque $n > r$; ou $L = \frac{e^{r-n} - f^{r-n}}{I(f-e)}$, lorsque $n < r$, c'est-à-dire, la différence de n & r étant représentée par m , $L = \frac{e^m - f^m}{\pm I(e-f)}$, ou le signe

de I est positif, ou négatif, selon que n est plus grand, ou moindre que r . De même, $l = \frac{e^{n-r-1} - f^{n-r-1}}{i(e-f)}$ lorsque n

$-1 > r$, ou $l = \frac{e^{r-n+1} - f^{r-n+1}}{i(e-f)}$ lorsque $n-1 < r$;

c'est-à-dire, $l = \frac{e^{m-1} - f^{m-1}}{i(e-f)}$, dans le premier cas,

& $l = \frac{e^{m+1} - f^{m+1}}{i(e-f)}$, dans le second. Puisque e & f sont

les racines de l'équation $xx - 2ax + 1 = 0$, $e = a + \sqrt{aa-1}$, $f = a - \sqrt{aa-1}$, & $e - f = 2\sqrt{aa-1}$, & $L =$

$$= \frac{(a + \sqrt{aa-1})^m - (a - \sqrt{aa-1})^m}{\pm 2\sqrt{aa-1}} = \frac{(a + \sqrt{aa-1})^m - (a - \sqrt{aa-1})^m}{\pm 2i\sqrt{1-aa}}$$

$\sqrt{1-aa}$. Donc, si Bb , cosinus de l'arc AB est $= a$, le rayon $OA = 1$, l'arc $AQ : AB :: m : 1$, & si Qq est le cosinus de AQ , Ob est $= \sqrt{1-aa}$, il suit (en comparant la valeur de S

Fig. 301
N. 3.

déterminée dans l'article 760.) que $L = \frac{\pm Oq}{i.Ob}$. Que l'arc QZ soit fait $= AB$, en sorte que $AZ = (m+1)AB$ selon que $n-1$ est plus grand, ou plus petit que r , & que Zz soit le cosinus de AZ alors $l = \frac{\pm Oz}{i.Ob}$. Donc la fraction $\frac{L-lx}{1-2ax+xx}$

$= \frac{\pm Oq \pm x.Oz}{i.Ob} \times \frac{1}{1-2ax+xx}$. Les valeurs des autres fractions sont semblables. Et ainsi l'on voit comment la fluente de

$\frac{x^r}{x^{2n} - Ax^{2n-1} + Bx^{2n-2} - \&c.}$ est déterminable par les arcs circulaires, & par les logarithmes, lorsque le dénominateur est le produit de diviseurs quadratiques.

781. Si les valeurs de L & l doivent être exprimées algébriquement, élevez $a+1$ à la puissance de l'exposant m , différence de n & r , par l'article 748. multipliez le second, le quatrième, sixième, &c. termes de cette puissance par 1, $aa-1$, $(aa-1)^2$, $(aa-1)^3$, &c. respectivement, & la somme des produits divisée par $(2a-2b)(2a-2c)(2a-2d) \times \&c.$ sera égale à $+L$, ou $-L$, selon que n est plus grand, ou moindre que r . On trouve l'autre coefficient l de la fraction

$\frac{L-lx}{1-2ax+xx}$ en multipliant les termes semblables de la puis-

sance de $a+1$ de l'exposant $n-r-1$, ou $r-n+1$ (selon que $n-1$ est plus grand, ou moindre que r) par 1, $aa-1$, $(aa-1)^2$, $(aa-1)^3$, &c. respectivement, divisant la somme des produits par $(2a-2b)(2a-2c)(2a-2d)$, &c. le quotient sera $=+l$ dans le premier cas, & à $-l$ dans le second. Les coefficients M & m , N & n , &c. se trouvent de même. Mais lorsque $n=r$, les coefficients L , M , N , &c. disparaissent, & lorsque $n-1=r$, les autres coefficients l , m , n , &c. disparaissent.

782. Lorsque la fraction, qui doit être réduite de cette manière, est de cette forme $\frac{1}{1-2zx^n+x^{2n}}$, dont le dénominateur est un trinôme, les coefficients des fractions $\frac{L-lx}{1-2ax+xx}$, &c.

auxquelles on doit la réduire, peuvent se déterminer plus brièvement, par l'article 779. par lequel (substituant, en ce cas, o pour r) $L = \frac{e}{N(e-f)} - \frac{f}{M(e-f)}$, ou P étant supposé $=(xx-2ax+1)Q$, M est la valeur de Q lorsque $x=e$, & N sa valeur lorsque $x=f$. En prenant les Fluxions, comme dans cet article, $\dot{P} = 2nx^{2n-1}\dot{x} - 2nzx^{n-1}\dot{x} = (2x\dot{x} - 2a\dot{x})Q + \dot{Q}(xx-2ax+1)$, & substituant e pour x , & M pour Q , $2ne^{2n-1} - 2nze^{n-1} = (2e-2a)M = (e-f)M$; par conséquent $(e-f)M = 2ne^{n-1}(e^n - z)$. De même, $(e-f)N = 2nf^{n-1}(f^n - z)$. Mais $e^{2n} - 2ze^n$

$+1 = 0$, & $e^n + e^n$ (ou $e^n + f^n$) $= 2l$, & $e^n - f^n = 2e^n - 2l$, ou $2l - 2f^n$; en sorte que $(e-f)M = ne^{n-1}(e^n - f^n)$, & $(e-f)N = nf^{n-1}(e^n - f^n)$. Donc $L = \frac{e}{nf^{n-1}(e^n - f^n)} - \frac{f}{ne^{n-1}(e^n - f^n)}$.

par l'article 779. $l = \frac{-1}{M(e-f)}$

$\frac{1}{N(f-e)} = \frac{-1}{ne^{n-1}(e^n - f^n)} + \frac{1}{nf^{n-1}(e^n - f^n)} = \frac{1}{n}$

$\left(\frac{e^{n-1} - f^{n-1}}{e^n - f^n} \right) = \frac{1}{n} \frac{a + \sqrt{aa-1}^{n-1} - a - \sqrt{aa-1}^{n-1}}{(a + \sqrt{aa-1})^n - (a - \sqrt{aa-1})^n}$

Donc, en comparant la valeur de S , dans l'article 760. on voit que si Bb , cosinus de l'arc AB , est $= a$, $AK = n. AB$, $AZ = (n - 1) AB$, Kk & Zz cosinus de AK & AZ , alors

$l = \frac{1}{n} \left(\frac{Oz}{Ok} \right)$ & la fraction $\frac{L - lx}{1 - 2ax + xx} = \frac{\frac{1}{n} - \frac{Oz}{n.ok}x}{1 - 2ax + xx}$, qui revient à la cinquième Proposition de M. de Moivre, *Liv. I. Miscel. Analyt.* telle qu'elle est exprimée brièvement, p. 42. de ce Traité.

783. Lorsque la fraction proposée est de cette forme $\frac{x^r}{1 - 2lx^n + x^{2n}}$, r étant un nombre entier positif moindre que $2n$; soit la différence de n & r représentée par m , comme ci-devant; & $L =$ (article 780.) $\frac{e^m - f^m}{1(e - f)} =$ (parce que $1e^{n-1} = M = ne^{n-1}$) $\left(\frac{e^n - f^n}{e - f} \right)$, par ce qui a été prouvé dans le dernier article)

$\frac{1}{n} \cdot \frac{e^n - f^n}{e^m - f^m}$. Donc, si l'arc $AQ : AB :: m : 1$, & que Qq

soit le cosinus de AQ , $L = \frac{Oq}{n.ok}$; & $l = \frac{e^{m-1} - f^{m-1}}{1(e - f)}$,

ou $\frac{e^{m+1} - f^{m+1}}{1(e - f)}$ selon que n est plus grand, ou moindre que

r ; c'est-à-dire, $l = \frac{1}{n} \left(\frac{e^{m-1} - f^{m-1}}{e^n - f^n} \right)$, ou $\frac{1}{n} \left(\frac{e^{m+1} - f^{m+1}}{e^n - f^n} \right)$;

ou supposant $AZ = (m - 1) AB$, & que Zz est le cosinus de AZ , $l = \frac{Oz}{n.ok}$. Donc la fraction $\frac{L - lx}{1 - 2ax + xx} =$

$= \frac{Oq - Oz.x}{n.ok.(1 - 2ax + xx)}$. Lorsque $r = n$, ou à $n - 1$, les numérateurs de ces fractions n'ont qu'un seul terme.

784. On voit, comme dans l'article 777. que la fraction $\frac{1 + px + qx^2 + rx^3 + \&c.}{x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - \&c.} = \frac{K}{x-a} + \frac{L}{x-b} + \frac{M}{x-c}$

$+ \frac{N}{x-d} + \&c.$ Si a, b, c, d , racines de l'équation x^n

$Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - \&c. = 0$, font toutes inégales, que l'ex-

posant de x , au numérateur $1 + px + qx^2 + \&c.$ soit moindre que n , & que l'on suppose les coefficients $K, L, M, N, \&c.$ respectivement égaux aux quantités qui résultent lorsque l'on substitue successivement $a, b, c, d, \&c.$ pour x dans

$$\frac{1 + px + qx^2 + rx^3 + \&c.}{nx^{n-1} - (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} - \&c.}. \text{ Ce Théorème sert}$$

à réduire brièvement la fluente de $\frac{1 + px + qx^2 + \&c.}{x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - \&c.} \cdot x$ aux logarithmes, ou aux arcs circulaires.

785. Supposons maintenant que quelques-uns des facteurs du dénominateur de la fraction, qui exprime l'ordonnée, sont égaux l'un à l'autre; & qu'il soit requis de trouver la fluente, ou l'aire. Par exemple, qu'il soit requis de trouver la fluente de

$$\frac{1 + px + qx^2 + \&c.}{(x+a)^m \times (x+b)^n} \cdot x. \text{ Supposons } \frac{1 + px + qx^2 + \&c.}{(x+a)^m \times (x+b)^n} = \frac{H}{(x+a)^m} + \frac{K}{(x+a)^{m-1}} + \frac{L}{(x+b)^{m-2}} + \dots + \frac{h}{(x+b)^n} + \frac{k}{(x+b)^{n-1}} + \frac{l}{(x+b)^{n-2}} + \&c. \text{ ou } H, K, L, h, k, l, \&c. \text{ sont les coefficients invariables qu'il faut déterminer,}$$

& les fractions de chaque sorte, doivent être continuées jusques à ce que leur nombre soit égal à m & n respectivement. En réduisant l'équation à un dénominateur commun, $H(x+b)^n + K(x+a)(x+b)^n + L(x+a)^2 \times (x+b)^{n-1} + \dots + h(x+a)^m + k(x+b) \times (x+a)^m + l(x+b)^2(x+a)^m + \&c. = 1 + px + qx^2 + rx^3 + \&c.$ En supposant $x+a=0$, ou $x=-a$, tous les termes de cette équation, qui renferment $x+a$, disparaissent, & nous trouvons $H(b-a)^n = 1 - pa + qa^2 - ra^3 + \&c.$ ou $H = \frac{1 - pa + qa^2 - \&c.}{(b-a)^n}$. En prenant

la Fluxion de l'équation, divisant chaque terme par x , & ensuite, supposant $x=-a$, nous avons $nH(b-a)^{n-1} + K(b-a)^n = p - 2qa + 3ra^2 - \&c.$ En prenant encore les Fluxions, divisant par x , & supposant $x=-a$, nous trouvons $n.(n-1)H(b-a)^{n-2} + 2nK(b-a)^{n-1} + 2L(b-a)^n = 2q - 6ra + \&c.$ Ainsi, on calculera aisément les valeurs de H ,

H, K, L, &c. & procédant de la même manière, en supposant $x + b = 0$, on aura les valeurs de h, k, l , &c. si la fraction proposée est $\frac{1}{(x+a)^m \times (x+b)^n}$, c'est-à-dire, si p, q, r , &c. sont

supposées disparoître, alors $H = \frac{1}{(b-a)^n}$, $K = \frac{-n}{(b-a)^{n+1}}$,

$L = n \cdot \frac{n+1}{2} \times \frac{1}{(b-a)^{n+1}}$, $h = \frac{1}{(a-b)^m}$, $k = \frac{-m}{(a-b)^{m+1}}$.

$l = m \cdot \frac{m+1}{2} \times \frac{1}{(a-b)^{m+1}}$, &c. ce qui revient au Théorème

de M. Leibnitz, *Act. Lipf.* 1703. Si la fraction proposée est

$\frac{1}{(x+a)^m \times (x+b)^n \times (x+c)^s}$, & si nous la supposons égale à

$\frac{H}{(x+a)^m} + \frac{K}{(x+a)^{m-1}} + \frac{L}{(x+a)^{m-2}} + \dots$ on trou-

vera, de même, que $H = \frac{1}{(b-a)^n \times (c-a)^s}$, $K = \frac{-mH}{(b-a)}$

$- \frac{sH}{c-a}$, $- 2C = \left(\frac{m(m-1)}{(b-a)^2} + \frac{2ms}{(b-a) \cdot (c-a)} + \right.$

$\left. + \frac{s(s-1)}{(c-a)^2} \right) \cdot H + \left(\frac{2m}{b-a} - \frac{2s}{c-a} \right) \cdot K$, &c.

786. L'ordonnée ou fraction, $\frac{1+px+qx^2+\&c.}{(x+a)^m \times (x+b)^n}$ étant réduite en cette manière, on trouvera la fluente (par l'article 737.)

$= \frac{-H}{(m-2)(x+a)^{m-1}} - \frac{K}{(m-2)(x+a)^{m-2}} \dots - \frac{h}{(n-1)(x+b)^{n-1}}$

$- \frac{k}{(n-2)(x+b)^{n-2}}$, &c. Si le dernier coefficient de chaque

espèce disparoît, la fluente sera déterminable en termes Algébriques. Dans les autres cas, on la détermine, par logarithmes, avec des quantités Algébriques.

787. Si l'on suppose la fraction $\frac{1+px+qx^2+\&c.}{(x+a)^m \times (x+b)^n} = \frac{K}{x+b}$

$+ \frac{A+Bx+Cx^2 \dots Gx^{m-1}}{(x+a)^m}$, pour pouvoir la réduire par la

Méthode de M. de Moivre, *Miscell. Analyt.* p. 59. On aura $K(x+a)^m + Ab + (A+Bb)x + (B+Cb)x^2 + (C+Db)x^3$

$= 1 + px + qx^2 + \&c.$ En supposant $x + b = 0$, ou $x = -b$, $K(a - b)^m = 1 - pb + qb^2 - \&c.$ La supposition de $x = 0$, donne $Ka^m + Ab = 1$. En prenant les Fluxions de l'équation, divisant par $\dot{x}$, & supposant $x = 0$, $mKa^{m-1} + A + Bb = p$, & continuant, de cette manière, on déterminera les coefficients $K, A, B, C, \&c.$ Si la fraction est $\frac{1}{(x+a)^m \times (x+b)}$ le

coefficient de chaque terme du numérateur de la seconde fraction, comme de Fx^r , se trouve, en élevant $a - b$, à la puissance dont l'exposant est m , réjetant autant de termes de cette puissance $a^m, ma^{m-1}b, \&c.$ qu'il y a d'unités dans $r + 1$; & divisant la somme, de ceux qui restent, par $b^{r+1}(a - b)^m$; car le quotient donnera $+F$, ou $-F$, selon que r est un nombre pair, ou impair. La fraction $\frac{1}{(1 - ax)^m \times (1 - bx)}$ se réduit

de même, par une règle semblable, en la supposant $= \frac{K}{1 - bx}$

$$+ \frac{A + Bx + Cx^2 \dots Gx^{m-1}}{(1 - ax)^m}; K = \frac{b^m}{(b - a)^m}, A = 1 - \frac{(b - a)^m}{b^m} \cdot B = bA + \frac{ma^m}{(b - a)^m}, C = bB - \frac{m(m-1)b^m a^2}{2(b - a)^m},$$
 &c.

788. La Fluxion $\frac{\frac{m}{x^r} \dot{x}}{e + fx^n}$ se transforme en $\frac{r z^{m+r-1} \dot{z}}{e + fz^{rn}}$ en supposant $\frac{1}{x^r} = z$; parce que $x^{\frac{m+x}{r}} = z^{m+r}$, $\frac{m}{x^r} \dot{x} = rz^{m+r-1} \dot{z}$ & $x^n = z^{rn}$. On transforme, de même, la Fluxion, en sorte qu'elle devienne rationnelle, lorsque le dénominateur est un trinôme, & l'on peut en trouver la fluente, par les articles précédens.

789. Newton a donné quelques Théorèmes excellens, pour réduire les fluentes à d'autres, d'une forme plus simple, dans les Propositions VIII. & XI. de son *Traité de la quadrature des Courbes*. Soit $R = e + fx^n + gx^{2n} + hx^{3n} + \&c.$ & par conséquent $\dot{R} = nfx^{n-1} \dot{x} + 2ngx^{2n-1} \dot{x} + 3nhx^{3n-1} \dot{x} + \&c.$

Soit $\dot{A} = x^{m-1} \dot{x} R^l$, $\dot{B} = \dot{A} x^n$, $\dot{C} = \dot{B} x^n$, $\dot{D} = \dot{C} x^n$, &c. & $ln + n = p$. On aura $meA + (p+m)fB + (2p+m)gC + (3p+m)hD + \&c. = x^m R^{l+1}$. On voit la vérité de ce Théorème, en prenant la Fluxion de $x^m R^{l+1}$, qui (par l'article 725.) est $x^{m-1} R^l (m R \dot{x} + (l+1) x \dot{R}) = x^{m-1} \dot{x} R^l (me + mfx^n + mgx^{2n} + \&c. + (l+1)nf x^n + (l+1)2ngx^{2n} + \&c.) = me\dot{A} + (p+m)f\dot{B} + (2p+m)g\dot{C} + (3p+m)h\dot{D} + \&c.$ Soit le nombre des termes dans $e + fx^n + gx^{2n} + \&c.$ valeur de R , représenté par q ; si l'on connoît autant d'aires successives $A, B, C, D, \&c.$ qu'il y a d'unités dans $q-1$, on peut, par ce Théorème, conclure celles qui restent par les précédentes. Ainsi R étant un binome $e + fx^n$, l'une des aires $A, B, C, D, \&c.$ étant donnée, on peut calculer les autres, par son moyen; & lorsque R est un trinome, $e + fx^n + gx^{2n}$, deux de ces aires, comme A & B suffisent pour déterminer le reste.

790. Soit $\dot{H} = x^{m-1} \dot{x} R^{l+1} = x^{m-1} \dot{x} R^l (e + fx^n + gx^{2n} + \&c.) = e\dot{A} + f\dot{B} + g\dot{C} + h\dot{D} + \&c.$ il suit, que $H = eA + fB + gC + hD + \&c.$ par où l'on voit que m & l étant des nombres quelconques, si r & s sont des nombres entiers, & que l'on connoisse autant d'aires $A, B, C, D, \&c.$ qu'il y a d'unités dans $q-1$, la fluente de $x^{m+r-1} \dot{x} (e + fx^n)^{l+s}$ peut se calculer par celles-là.

791. On voit, de même, que si $R = e + fx^n + gx^{2n} + \&c.$ $S = E + Fx^n + Gx^{2n} + \&c.$ $\dot{A} = x^{m-1} \dot{x} R^l S^k$, $\dot{B} = \dot{A} x^n$, $\dot{C} = \dot{B} x^n$, &c. & $ln + n = p$, $kn + n = q$, alors $x^m R^{l+1} S^{k+1} = meEA + (meF + mFE + pFE + qeF)B + (meG + mgE + mFE + pFF + qfF + 2pgE + 2qeG)C + \&c.$

792. De-là, on peut aisément conclure des Théorèmes particuliers qui peuvent servir à la résolution des Problèmes. Soit R un binome $e - fx^n$, & comme dans l'article 789. soit $\dot{A} = x^{m-1} \dot{x} R^l$, $\dot{B} = \dot{A} x^n$, $\dot{C} = \dot{B} x^n$, $\dot{D} = \dot{C} x^n$, &c. & $M = ln + n + m$. Soient m & $l+1$ des nombres positifs quelconques, enforte

que $x^m R^{l+1}$ puisse disparaître lorsque $x=0$, ou $e-fx^n=0$, & soit r un nombre entier positif; si A représente la fluente de $x^{m-1} \dot{x} (e+fx^n)^l$ qui est produite lorsque x flue, & que cette fluente étant 0 devient égale à $\left(\frac{e}{f}\right)^{\frac{1}{n}}$, la fluente de $x^{m+rn-1} \dot{x} (e-fx^n)^l$, produite dans le même tems, fera à $A \frac{e^r}{f^r}$, comme

$\frac{m}{M} \times \frac{m+n}{M+n} \times \frac{m+2n}{M+2n} \times \frac{m+3n}{M+3n} \times \&c.$ à 1; les fractions $\frac{m}{M}$, &c. étant continuées jusques à ce que leur nombre soit égal à r . Car, dans le cas présent $meA - MfB = 0$, par l'article 789. & $B = \frac{m}{M} \times \frac{eA}{f}$, $C = \frac{m+n}{M+n} \cdot \frac{eB}{f} = \frac{m}{M} \cdot \frac{m+n}{M+n} \cdot \frac{ee}{ff} A$, $D = \frac{m+2n}{M+2n} \cdot \frac{eC}{f} = \frac{m}{M} \cdot \frac{m+n}{M+n} \cdot \frac{m+2n}{M+2n} \cdot \frac{e^3}{f^3} A$, & ainsi de suite. On se sert du même Théorème, lorsque $\dot{A} = x^{m-1} \dot{x} (fx^n - e)^l$.

793. Par exemple, soit $\dot{A} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{1-xx}}$, & par conséquent A égal à la quatrième partie de la circonférence d'un cercle, dont le rayon est 1; la fluente de $\frac{x^{2r} \dot{x}}{\sqrt{1-xx}}$ produite, pendant que x flue, & que depuis 0 il devient = 1, fera à A , comme $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \&c.}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \&c.}$ à 1; ces fractions étant continuées jusques à ce que leur nombre soit = r ; parce qu'en ce cas, $\dot{A} = x^{m-1} \dot{x} (e-fx^n)^l = x^{1-1} \dot{x} (1-xx)^{-\frac{1}{2}}$, enforte que $m=1$, $l=-\frac{1}{2}$, $n=2$, $M=2$, $e=1$, & $f=1$. La Fluxion $\frac{\dot{x}}{\sqrt{1-xx}}$ se transforme en $\frac{\dot{z}}{1+zz}$, en supposant $x = \frac{z}{\sqrt{1+zz}}$, & $\frac{x^{2r} \dot{x}}{\sqrt{1-xx}}$ en $\frac{z^{2r}}{(1+zz)^{r+1}}$; dont la fluente est, par conséquent à A , fluente de $\frac{z}{1+zz}$, (ou du quart de circonférence du cercle dont le

rayon = 1) comme $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}$, &c. à 1. Si l'on suppose $\dot{A} = \dot{x} \sqrt{1 - x x}$, auquel cas A est la quatrième partie de l'aire du cercle dont le rayon est 1, la fluente de $x^{2r} \dot{x} \sqrt{1 - x x}$ sera à A, comme $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10}$, &c. à 1. En supposant $x = \frac{z}{\sqrt{1 + z z}}$, la fluente correspondante de $\frac{z^{2r} \dot{z}}{(1 + z z)^{r+2}}$ fera à la fluente de $\frac{\dot{z}}{(1 + z z)^2}$ en même raison. On pourra, de même, conclure d'autres Théorèmes, de cette espèce, de l'article 789. &c.

794. La Fluxion $x^{m-1} \dot{x} (e + f x^n)^l$ étant transformée, comme dans l'article 742. en supposant $e + f x^n = z$, on mesurera la fluente par les aires des sections coniques lorsque $\frac{m}{n}$ est un nombre entier positif, ou négatif, par l'article 789. lorsque $\frac{m}{n} + l$ est un nombre entier, on trouvera la même chose en supposant $z = \frac{e + f x^n}{x^n}$. Ou si l est égal à la fraction $\frac{q}{s}$, on peut

supposer $z = (e + f x^n)^{\frac{1}{s}}$ dans le premier cas, & $z = \left(\frac{e + f x^n}{x^n}\right)^{\frac{1}{s}}$ dans le second. La Fluxion $\dot{x} x^{r n - 1}$

$\left(\frac{e + f x^n}{g + h x^n}\right)^l$ se transforme en supposant $\frac{e + f x^n}{g + h x^n} = z$, (& par conséquent $x^n = \frac{e - g z}{h z - f}$ & $\frac{n \dot{x}}{x} = \frac{g f - e h}{(e - g z)(h z - f)} \dot{z}$) en $\frac{g f - e h}{n} z \dot{z} \frac{(e - g z)^{r-1}}{(h z - f)^{r+1}}$. En supposant $z = g x^n + \frac{1}{2} f$,

la Fluxion $x^{r n - 1} \dot{x} (e + f x^n + g x^{2n})^{\pm \frac{1}{2}}$ se transforme en $\frac{\dot{z}}{n} \left(\frac{2 z - f}{2 g}\right)^{r-1} \times \left(\frac{e - f f + z z}{2 g}\right)^{\pm \frac{1}{2}}$, & l'on peut trouver la fluente, dans ces deux cas, par les articles précédens, lorsque

r un nombre entier. Si l'on suppose $y = \frac{\sqrt{e + fx^n + gx^{2n}} - \sqrt{e}}{x^n}$,

& que l'on transforme la dernière Fluxion de x en y , son expression deviendra rationnelle, comme on l'a fait voir, *Miscel. Analyt.* p. 65. Lorsque l'une de ces Fluxions est multipliée, ou divisée par un binome rationnel $E + Fx^n$, ou par un trinome $E + Fx^n + Gx^{2n}$, ou par une quantité qui peut se réduire à de pareils facteurs binomes, ou trinomes, la fluente peut se mesurer par les aires des sections coniques, (c'est-à-dire, ou par des quantités Algébriques, ou par des arcs circulaires, ou par des logarithmes, ou par des quantités jointes ensemble) par les articles précédens.

795. Lorsqu'on propose une Fluxion qui renferme une quantité irrationnelle, on trouve souvent la fluente en termes finis, ou bien on peut la comparer avec un arc circulaire, ou avec les logarithmes, en supposant la quantité, qui est sous le signe radical, égale à une nouvelle fluente. Par exemples, si $\dot{Q}$

$$= \frac{\dot{z}}{(E + Fx)(e + fx)} \times \left(\frac{E + Fx}{e + fx} \right)^{\frac{m}{n}}, \text{ \& si l'on suppose } z$$

$$= \frac{E + Fx}{e + fx}, \text{ alors } \frac{\dot{z}}{z} = \frac{Fe - Ef}{(E + Fx)(e + fx)} \dot{x}, \text{ \& } \dot{Q} =$$

$$= \frac{\frac{\dot{z}}{z} \cdot \frac{m}{n} - 1}{Fe - Ef}; \text{ par conséquent la fluente } Q = \frac{\frac{m}{n} \cdot \frac{z}{n}}{m(Fe - Ef)}$$

$$= \frac{n}{m(Fe - Ef)} \times \left(\frac{E + Fx}{e + fx} \right)^{\frac{m}{n}}. \text{ Mais souvent on trouve cela}$$

plus aisément, en transformant la Fluxion du sinus, ou cosinus d'un arc à la tangente, ou à la sécante, ou à la somme, ou à la différence de la sécante, & de la tangente, ou par des opérations converses. Si l'on suppose $x = \frac{z}{\sqrt{1 + zz}}$ (z étant la

tangente qui correspond au sinus x) on aura $\frac{\dot{x}}{\sqrt{1 - xx}} = \frac{\dot{z}}{1 + zz}$.

Donc, si $\dot{Q} = \frac{-\dot{x}}{x^2 \sqrt{1 - xx}}$, ou aura $\dot{Q} = \frac{-\dot{z}}{z^2}$, $Q = \frac{1}{z}$

$= \frac{\sqrt{1-xx}}{x}$. Et si $\dot{Q} = \frac{aa\dot{x}}{(aa+xx)\sqrt{1-xx}} = \frac{aa\dot{x}}{aa+(aa+1)zz}$,
 alors Q est égal à l'arc d'un cercle, qui a pour rayon $\frac{a}{\sqrt{aa+1}}$,
 & dont la tangente est z, ou $\frac{x}{\sqrt{1-xx}}$. Si l'on suppose x
 $+ \sqrt{xx+1} = z$, on aura $\frac{\dot{x}}{\sqrt{xx+1}} = \frac{\dot{z}}{z}$, enforte que la
 fluente fera le logarithme de z, le *module* étant 1. Et en sup-
 posant $\frac{e + \sqrt{ee+ffx^{2n}}}{x^n} = z$, $\frac{-\dot{x}}{x\sqrt{ee+ffx^{2n}}} = \frac{\dot{z}}{nez}$;
 enforte que la fluente est $\frac{1}{ne}$ logarithme z, le *module* étant
 l'unité.

796. Supposant, comme dans l'article 789. $R = e + fx^n$, $\dot{A} = x^{m-1}\dot{x}R^l$, & $\dot{B} = \dot{A}x^n$, nous trouvons $meA + MfB = x^m R^{l+1}$, d'où il suit, que si ni $m=0$, ni $M=0$, A & B dépendent mutuellement l'un de l'autre, mais si $m=0$, B est déterminable par des termes finis Algébriques; & si $M=0$, A est déterminable de même. Si ni $\frac{m}{n}$, ni $\frac{M}{n} = 0$, ou $=$ à un nombre entier, les fluentes de toutes les Fluxions dans la série $\dot{A}x^{2n}$, $\dot{A}x^n$, $\dot{A}$, $\dot{A}x^{-n}$, $\dot{A}x^{-2n}$, &c. (qui peut se continuer des deux côtés) dépendent de la fluente de chaque Fluxion dans la série; mais lorsque $\frac{m}{n}$, ou $\frac{M}{n}$ est un entier, ou lorsque l'un des deux disparoît, on ne peut pas dire la même chose de toute la suite. Soit $\dot{A} = \frac{a\dot{x}}{x^2\sqrt{aa-xx}}$, ou $M=0$, $m=-1$;
 & $A = \frac{\sqrt{aa-xx}}{ax}$; mais la fluente de $\dot{A}x^2 (= \frac{a\dot{x}}{\sqrt{aa-xx}})$ est l'arc circulaire, dont le sinus est x, & le rayon a: les fluentes de $\dot{A}x^{-2}$, $\dot{A}x^{-4}$, &c. dépendent de la première, & peuvent se déterminer en termes finis Algébriques; mais les fluentes

de $\dot{A}x^4$, $\dot{A}x^6$, &c. dépendent de la dernière, & peuvent se déterminer, par cet arc circulaire, avec des quantités Algébriques.

Si $\dot{A} = \frac{-x\dot{x}}{\sqrt{aa-xx}}$, $m=0$, $M=1$, $A=\sqrt{aa-xx}$, & les

fluentes de $\dot{A}x^2$, $\dot{A}x^4$, &c. sont déterminables par des quantités Algébriques, mais celle de $\dot{A}x^{-2}$ ($= \frac{-\dot{x}}{x\sqrt{aa-xx}}$) est le

logarithme de $\frac{a+\sqrt{aa-xx}}{x}$, le module étant l'unité, & le

les fluentes de $\dot{A}x^{-4}$, $\dot{A}x^{-6}$, &c. dépendent de ce logarithme.

De même, si $\dot{A} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{xx-1}}$, A est le logarithme de $x +$

$+\sqrt{xx-1}$, & les fluentes de $\dot{A}x^2$, $\dot{A}x^4$, &c. en dépendent.

Mais les fluentes de $\dot{A}x^{-2}$, $\dot{A}x^{-4}$, &c. sont assignables en termes Algébriques finis. Si $\dot{A} = \frac{x\dot{x}}{\sqrt{xx-1}}$, $A = \sqrt{xx-1}$, &

les fluentes de $\dot{A}x^2$, $\dot{A}x^4$, &c. sont assignables en termes Algébriques finis. Mais la fluente de $\dot{A}x^{-2}$ ($= \frac{\dot{x}}{x\sqrt{xx-1}}$) est

l'arc dont la sécante est x , le rayon étant l'unité, & les fluentes de $\dot{A}x^{-4}$, $\dot{A}x^{-6}$, &c. en dépendent. Si $\dot{A} = \frac{x^m-1\dot{x}}{\sqrt{+aa+xx}}$,

& m est une fraction, les fluentes de toutes les Fluxions dans la

série $\dot{A}x^{-2}$, $\dot{A}x^{-4}$, $\dot{A}x^{-6}$, &c. dépendent de A .

797. Soit $R = fx^n - e$, $\dot{A} = x^{m-1}\dot{x}R^l$, $\dot{B} = \dot{A}x^{-n}$, $\dot{C} =$

$= \dot{B}x^{-n} = \dot{A}x^{-2n}$, $\dot{D} = \dot{C}x^{-n} = \dot{A}x^{-3n}$, &c. & $M = ln + n$

$+ m$, comme ci-devant; lorsque $fx^n = e$, $B = \frac{M-n}{m-n}$.

$\frac{fA}{e}$, $C = \frac{M-2n}{m-2n} \cdot \frac{fB}{e}$, $D = \frac{M-3n}{m-3n} \cdot \frac{Cf}{e}$, &c. Donc r

étant un nombre entier positif, si $\dot{Q} = \dot{A}x^{-rn}$, $Q : \frac{A f^r}{e^r} :: \frac{M-n}{rn-n}$.

$\frac{M-n}{m-n} \cdot \frac{M-2n}{m-2n} \cdot \frac{M-3n}{m-3n}$, &c. (les fractions étant continuées jufques à ce que leur nombre $= r$) : 1. Par exemple, foit

$$\dot{A} = \frac{\dot{x}}{x \sqrt{xx-1}}, \quad \dot{Q} = \frac{\dot{x}}{x^{2r+1} \sqrt{xx-1}}, \quad Q : A :: \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot$$

$\frac{7}{8}$, &c. : 1. ces fluentes font produites, pendant que $\frac{1}{x}$ depuis 0 devient $= 1$.

798. Après les fluentes qui peuvent être déterminées exactement en termes finis, par des expreffions Algébriques communes, & celles qui peuvent fe réduire aux arcs circulaires, & aux logarithmes, celles, qui méritent la place fuivante, font les fluentes que l'on peut déterminer par les arcs hyperboliques & elliptiques, & celles-ci, avec les premières, font toutes comprises fous celles qui font mefurées par des lignes qui terminent les fections coniques, (le triangle & le cercle étant des figures de cette efpece,) comme les deux premières font mefurées par

les aires des fections coniques. La fluente de $\frac{\dot{x}}{\sqrt{1+x}}$ eft de

la premiere claffe, celle de $\frac{\dot{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{1+x})}$, ou de $\frac{\dot{x}}{\sqrt{1+xx}}$

eft de la feconde; mais les fluentes de $\frac{\dot{x}\sqrt{x}}{\sqrt{1+xx}}$, $\frac{\dot{x}}{\sqrt{x}\sqrt{1+xx}}$,

$\frac{\dot{x}}{(1+xx)^{\frac{1}{2}}}$, & $\frac{\dot{x}}{(1+xx)^{\frac{3}{2}}}$ font de la troifième claffe, & (autant

qu'on la put découvrir jufqu'ici) on ne peut pas les réduire à la premiere. Les fluentes de cette claffe, font quelquefois néceffaires à la réfolution des Problèmes utiles, & notre deffein nous oblige d'en rendre compte.

799. Soit A E H une hyperbole équilatere, qui a fon centre en S, & fon fommet en A, A D une droite perpendiculaire à SA; foit SA = 1, SN = x, & qu'un cercle décrit du centre S, avec le rayon SN, rencontre A D en M, que S E divife également l'angle A S M, & rencontre l'hyperbole en E, l'arc

hyperbolique A E fera égal à la fluente de $\frac{\dot{x}\sqrt{x}}{2\sqrt{xx-1}}$. Car,

foit l'arc A E = s, S E = r, & que S P foit perpendiculaire à

la tangente de l'hyperbole en P; les triangles SMA & SEP seront semblables, par l'article 181. & $\dot{s} : \dot{r} :: SE : EP :: SM : AM :: x : \sqrt{xx-1}$; mais SA, SE & SM sont en proportion continue, ou $r = \sqrt{x}$, enforte que $\dot{r} : \dot{x} :: 1 : 2\sqrt{x}$; par conséquent $\dot{s} = \frac{\dot{x}\sqrt{x}}{2\sqrt{xx-1}}$; & supposant que la fluente de $\frac{\dot{x}\sqrt{x}}{\sqrt{xx-1}}$ commence à être produite lorsque $x = 1$, & qu'ensuite elle croît, pendant que x croît, elle sera toujours $= 2AE$. Si Am est perpendiculaire à SM en m, & si nous supposons maintenant

$Sm = x$, l'arc hyperbolique AE sera la fluente de $\frac{-\dot{x}}{2x\sqrt{x}\sqrt{1-xx}}$

(comme on peut le voir en substituant, dans la précédente Fluxion x^{-1} pour x), & $EP - AE$, excès de la tangente sur l'arc hyperbolique AE, sera la fluente de $\frac{-\dot{x}\sqrt{x}}{2\sqrt{1-xx}}$; parce que

EP sera alors égal à $\sqrt{\frac{1}{x} - x}$, & sa Fluxion $= \frac{-\dot{x} - xxx\dot{x}}{2x\sqrt{x}\sqrt{1-xx}}$.

800. Soit AB perpendiculaire du sommet A de l'hyperbole l'asymptote SB en B. Supposons maintenant $SB = 1$, sur BA prenons $BL = x$; joignons SL, & qu'elle rencontre l'hyperbole en E; du centre S décrivez l'arc AQ, qui coupe SE en Q, l'arc

hyperbolique AE sera égal à la fluente de $\frac{+\dot{x}\sqrt{1-xx}}{2x\sqrt{x}}$; parce

que si Ab, LZ & EK sont perpendiculaires à l'autre asymptote en b, Z & K respectivement, $Sb : SK :: EK : Ab (= LZ) ::$

$SK : SZ$, $SZ = BL = x$, $SK = \sqrt{Sb \cdot Sz} = \sqrt{x}$, $SE^2 = SK^2 + EK^2 = x + \frac{1}{x}$, & la Fluxion de AE étant à celle de SK,

comme SE à SK, est, par conséquent, égale à $\frac{+\dot{x}}{2x} \sqrt{x + \frac{1}{x}}$,

ou $\frac{\dot{x}\sqrt{1+xx}}{2x\sqrt{x}}$. La Fluxion de SE, ou de QE est $\frac{xx\dot{x} - \dot{x}}{2x\sqrt{x}\sqrt{xx+1}}$;

laquelle étant ajoutée à la Fluxion de AE, on voit que AE

+ EQ est la fluente de $\frac{\dot{x}\sqrt{x}}{\sqrt{1+xx}}$ qui commence à être for-

mée. lorsque $x = 1$, (ou lorsque $BL = BA$) & ensuite croît pendant que x croît. De même, $AE - EQ$ est la fluente de

$\frac{x\sqrt{x}}{xx\sqrt{1+xx}}$ qui commence à être formée lorsque $x = 1$, & ensuite croît, pendant que x décroît.

801. Soit $SA = 1$, $AM = x$, $2AE$ sera la fluente de $\frac{x}{(1+xx)^{\frac{1}{2}}}$, laquelle dispa- roît avec x ; comme on le voit, en

substituant dans la première valeur de $\dot{s}$, article 799. $\sqrt{1+xx}$ à la place de x . Soit $SA = 1$, $Am = x$, $2EP - 2AE$ sera la fluente de $\frac{-x}{(1-xx)^{\frac{1}{2}}}$, qui commence à être formée lorsque $x = 1$, & ensuite croît lorsque x décroît. Si l'on suppose $SB = 1$, $SL = x$, $AE + EQ$ sera la fluente de $\frac{x}{(xx-1)^{\frac{1}{2}}}$, qui commence à être formé lorsque $xx = 2$.

802. Mais pour la fluente de $\frac{x}{\sqrt{x}\sqrt{1+xx}}$, ou de $\frac{x}{(1+xx)^{\frac{1}{2}}}$, il ne paroît pas qu'il soit possible de la représenter par un arc hyperbolique, & par des quantités Algébriques; cependant, en prenant, de même, un arc elliptique, on peut la déterminer par la construction suivante. Le reste subsistant, comme dans l'article 799. soit décrite une ellipse ARD , dont le centre est S , SF distance du foyer F au centre S égale au petit demi-axe SA , & par conséquent le demi-grand axe $SD : SA :: \sqrt{2} : 1$. Soit $SA = 1$, $Sm = x$; prenez SX sur SA égal à SP (ou à la moyenne proportionnelle entre SA & Sm); que l'ordonnée

Fig. 305.
N. 2.

XR rencontre l'ellipse en R ; la fluente de $\frac{-x}{2\sqrt{x}\sqrt{1-xx}}$ qui commence à être formée lorsque $x = 1$, & ensuite croît lorsque x décroît, sera égale à $AR + AE - EP$ différence, par laquelle la somme des arcs elliptique & hyperbolique AR & AE , surpasse EP tangente de celui-ci. Car $SX = \sqrt{x}$, & si RT , tangente de l'ellipse en R , rencontre SA en T , $ST = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $XT = ST - SX = \frac{1-x}{\sqrt{x}}$, $XR^2 = 2(1-x)$, RT^2

$= XT^2 + XR^2 = \frac{1-xx}{x}$, & la Fluxion de l'arc elliptique AR, sera à la Fluxion de SX, comme RT à XT, c'est-à-dire, comme $\sqrt{1-xx}$ est à $1-x$, ou comme $1+x$ à $\sqrt{1-xx}$; par conséquent (la Fluxion de SX étant $\frac{\dot{x}}{2\sqrt{x}}$) celle de l'arc

$$AR \text{ fera } \frac{-\dot{x}}{2\sqrt{x}} \times \frac{1+x}{\sqrt{1-xx}} = \frac{-\dot{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{1-xx}} - \frac{\dot{x}\sqrt{x}}{2\sqrt{1-xx}}$$

& la fluente de $\frac{-\dot{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{1-xx}}$ (par la dernière partie de l'article 799.) $= AR + AE - EP$. Si l'on suppose $Am = x$,

AR + AE - EP sera la fluente de $\frac{\dot{x}}{2(1-xx)^{\frac{3}{2}}}$, comme on

le voit, en substituant $\sqrt{1-xx}$ pour x , dans la précédente Fluxion. En supposant $BL = z$, & $SB = 1$, la même différence

AR + AE - EP donne la fluente de $\frac{\dot{z}}{\sqrt{z}\sqrt{1+zz}}$; parce

que si $Sm = x$, alors $x = \frac{zz\sqrt{z}}{1+zz}$. Elle est aussi fluente de

$\frac{\dot{z}}{(zz-1)^{\frac{3}{2}}}$, si l'on suppose $SL = z$, & $SB = 1$. ou de

$\frac{\dot{z}}{2(1+zz)^{\frac{3}{2}}}$ en supposant $AM = z$, $SA = 1$.

803. La fluente de $\frac{-\dot{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{1-xx}}$ (que nous avons trou-

vée égale à AR + AE - EP, article 802.) est égale à l'arc AP de la courbe qui est le lieu des points P, (ou les perpendiculaires du centre S coupent les tangentes de l'hyperbole équilatère,) cette courbe se nomme *lemniscata*. Car (article 212.) la Fluxion de la courbe AP est à la Fluxion de SP, comme SE à EP, ou comme SA à Am, c'est-à-dire, (supposant $SA = 1$, & $Sm = x$,) $:: 1 : \sqrt{1-xx}$, mais $SP : SA :: SA :$

SE, & $SE = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Donc $SP = \sqrt{x}$. La Fluxion de SP est

$\frac{\dot{x}}{2\sqrt{x}}$, & celle de AP = $\frac{-\dot{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{1-xx}}$. Si F est le foyer de Fig. 306.

l'hyperbole, FH perpendiculaire à la tangente EP en H, on sçait que H se trouvera toujours dans un cercle du centre S, & du rayon SA, & si FH prolongée rencontre ce cercle en h, SP fera égal à $\frac{1}{2}Hh$. Par où l'on voit que la *lemniscata* peut Fig. 307. se construire aisément, de la manière suivante. Coupez également SF en f, du centre f décrivez un cercle avec le rayon égal à $\frac{1}{2}SA$, qu'une droite SX rencontre ce cercle en x & X, coupez SP, depuis S, toujours égal à la corde Xx, le point P fera dans la *lemniscata*. Et les fluentes, décrites dans l'article 802. peuvent être représentées ou par AR + AE — EP, ou par l'arc AP, de cette courbe, qui se construit si aisément.

804. Soit AEh une autre hyperbole, SA le demi-grand-axe, Fig. 308.

& SD le demi-axe conjugué, SA = a, SD = b, $e = \frac{aa-bb}{2a}$,

SE = r, SP = p, AE = s, & $x = \frac{abb}{pp}$, l'arc hyperbolique

AE fera égal à la fluente de $\frac{\dot{x}\sqrt{xa}}{2\sqrt{xx+2ex-bb}}$. Car, soit

SH le demi-diamètre conjugué à SE, on aura SE² — SH² = aa — bb = 2ea, ou SH² = rr — 2ea, & SH.SP =

= SA.SD = ab, & rr — 2ea = $\frac{aabb}{pp} = ax$. Mais s : r ::

SE : EP :: r : $\sqrt{rr-pp}$, & $s = \frac{rr}{\sqrt{rr-pp}} = \frac{\dot{x}\sqrt{xa}}{2\sqrt{xx+2ex-bb}}$.

Puisque EP = $\sqrt{rr-pp} = \sqrt{\frac{aax+2ex-bb}{x}}$; la Fluxion

de EP est $\frac{\sqrt{a}}{2x\sqrt{x}} \times \frac{xx\dot{x}+bb\dot{x}}{\sqrt{xx+2ex-bb}}$, & EP — AE (ex-

cès de la tangente sur l'arc hyperbolique,) est la fluente de

$\frac{bb\dot{x}\sqrt{a}}{2x\sqrt{x}\sqrt{xx+2ex-bb}}$, ou (supposant $z = \frac{pp}{a} = \frac{bb}{x}$) de

$\frac{-\dot{z}\sqrt{az}}{\sqrt{bb+2ez-xx}}$. On voit donc que l'arc AE est la fluente de

Fig. 309. $\frac{-a^2 b^2 \dot{p}}{pp \sqrt{a^2 b^2 + 2 a e p^2 - p^4}}$. De même, on voit que si AEB est une ellipse, S le centre, SA = a, SB = b, aa + bb = 2ea, SP perpendiculaire à la tangente EP en P, & SP = p, x = $\frac{abb}{pp}$, l'arc AE fera la fluente de $\frac{\dot{x} \sqrt{ax}}{\sqrt{2ex - xx - bb}}$, ou de $\frac{-a^2 b^2 \dot{p}}{pp \sqrt{2eap^2 - a^2 b^2 - p^4}}$ qui commence à être formée lorsque p = a.

805. Pour représenter la fluente de $\frac{\dot{z}}{\sqrt{z} \sqrt{b^2 + 2ez - zz}}$, ou

de $\frac{\dot{p}}{\sqrt{a^2 b^2 + 2 a e p^2 - p^4}}$, nous devons avoir recours aux deux

Fig. 308.
N. 1.

arcs hyperbolique & elliptique. Le reste subsistant, comme dans le dernier article, joignez AD, & que AF, perpendiculaire à AD, rencontre DS prolongée en F, décrivez une ellipse ARb, dont le foyer soit en F, le centre en S, & le petit-axe SA; sur SA prenez SQ = SP; que QR, ordonnée en Q, rencontre l'ellipse en R, $\frac{b}{a}$. AR + AE - EP fera la fluente

de $\frac{-bb \dot{p}}{\sqrt{aa - pp} \sqrt{bb + pp}}$, ou (supposant pp = az, & 2ea

= bb - aa, comme ci-devant,) de $\frac{-bb \dot{z}}{2 \sqrt{az} \sqrt{bb - 2ez - zz}}$. Car,

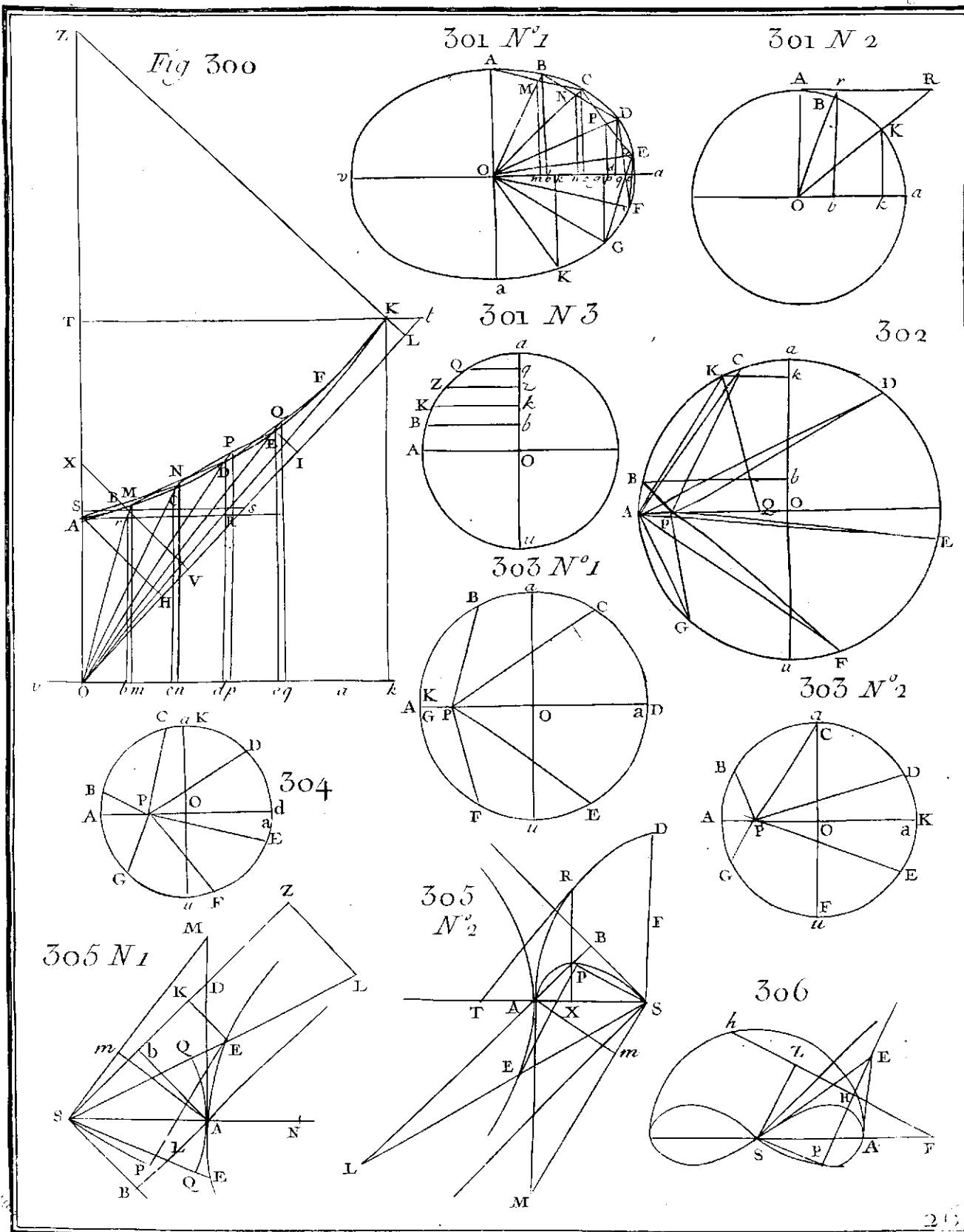
si RT, tangente de l'ellipse en R, rencontre SA en T, AR = S, SQ (= SP) = p, & SF = k, ou aura ST = $\frac{aa}{p}$,

QT = $\frac{aa - pp}{p}$, RT = $\frac{\sqrt{aa - pp}}{p} \cdot \sqrt{aa + \frac{k^2 p^2}{a^2}}$, $\dot{s} : -\dot{p} ::$

RT : QT, & $\dot{s} = \frac{-\dot{p}}{a} \cdot \frac{a^4 + k^2 p^2}{\sqrt{aa - pp} \sqrt{a^4 + k^2 p^2}} =$ (parce que

kb = aa, par la supposition,) $\frac{-a \dot{p}}{b} \cdot \left(\frac{bb + pp}{\sqrt{a^2 - p^2} \sqrt{b^2 + p^2}} \right)$.

Mais la Fluxion de EP - AE a été trouvée (article 804.)



$$= \frac{-\dot{p} p p}{\sqrt{a a - p p} \sqrt{b b + p p}}. \text{ Donc } \frac{b}{a} \text{ AR} + \text{AE} - \text{EP} \text{ est la}$$

fluente de $\frac{-b b \dot{p}}{\sqrt{a a - p p} \sqrt{b b + p p}}$, ou de $\frac{-b b z}{2 \sqrt{a z} \sqrt{b b - z z - z z}}$, qui commence à être produite lorsque p & z sont $= a$, & l'on voit, par l'article 327. que la fluente est finie, pendant que x décroît jusques à disparaître.

806. Les valeurs de ces fluentes, comme de $\frac{\dot{p} \sqrt{a^4 + k^2 p^2}}{\sqrt{a a - p p}}$, (Fluxion de l'arc elliptique BR) peuvent se calculer, ou en réduisant $\sqrt{\frac{a^4 + k^2 p^2}{a a - p p}}$ à une suite, multipliant chaque terme par $\frac{\dot{p}}{a}$, & prenant les fluentes des différens produits, par l'article 737. qui formeront une suite de quantités Algébriques. Ou bien on peut la comparer avec la fluente de $\frac{a \dot{p}}{\sqrt{a a - p p}}$, (arc circulaire dont le rayon est a , & le sinus p) en réduisant seulement $\sqrt{a^4 + k^2 p^2}$ à une suite, par l'article 793. Ainsi $\dot{s} = \frac{a \dot{p}}{\sqrt{a a - p p}} (1 + \frac{k^2 p^2}{2 a^2} - \frac{k^4 p^4}{8 a^8} + \&c.)$ par conséquent le quart elliptique ARB est au quart de cercle du rayon a , comme $1 + \frac{k^2}{4 a^2} - \frac{3 k^4}{64 a^4} + \frac{5 k^6}{256 a^6} - \&c.$ à 1. Le même quart elliptique est au quart de cercle d'un rayon $= SB$, demi-grand-axe, en supposant $SB = a$, comme $1 - \frac{k^2}{4 a^2} - \frac{3 k^4}{64 a^4} - \frac{5 k^6}{256 a^6} - \&c.$ à 1, par l'article 793.

$$807. \text{ Soit } \frac{-b b \dot{p}}{\sqrt{a a - p p} \sqrt{b b + p p}} = \dot{Q}, \quad \frac{-a \dot{p}}{\sqrt{a a - p p}} = \dot{A},$$

on aura $\dot{Q} = \frac{-b \dot{p}}{\sqrt{a a - p p}} (1 + \frac{b b}{p p})^{-\frac{1}{2}} = \frac{\dot{A} b}{a} (1 - \frac{p p}{2 b b} + \frac{3 p^4}{8 b^4} - \frac{5 p^6}{16 b^6} + \&c.)$ & par l'article 793. la fluente Q , qui est produite entre les termes où $p = 0$, & $p = a$, est (en supposant que N représente la raison de la demi-circonférence

du cercle à son diamètre) $Nb \left(1 - \frac{a^2}{4b^2} + \frac{9a^4}{64b^4} - \frac{25a^6}{256b^6} + \&c. \right)$ ou les coefficients numériques $1, \frac{1}{4}, \frac{9}{64}, \&c.$ sont les quarrés des différens coefficients du binome élevé à la puissance $-\frac{1}{2}$. Si l'on suppose $x = a - \frac{pp}{a}$, & $E = a + \frac{bb}{a}$, on

aura $\dot{Q} = \frac{bb}{\sqrt{Ea}} \cdot \left(\frac{\dot{x}}{2\sqrt{ax - xx}} \right) \left(1 - \frac{x}{E} \right)^{-\frac{1}{2}}$, ou $\frac{bb}{a}$

$\left(\frac{\dot{x}}{2\sqrt{Ex - xx}} \right) \times \left(1 - \frac{x}{a} \right)^{-\frac{1}{2}}$. Que A , premierement, mar-

que l'arc d'un cercle décrit sur le diamètre a dont le sinus verse

est égal à x , on aura $\dot{A} = \frac{ax}{2\sqrt{ax - xx}} = \frac{1}{2} a \dot{x} x^{-\frac{1}{2}} (a - x)^{-\frac{1}{2}}$,

ou $m - 1 = -\frac{1}{2}$, $m = \frac{1}{2}$, $l = -\frac{1}{2}$, $e = a$, $f = 1$, $M = ln + n$ $+ m = 1$; & par l'art. 792. lorsque r est un nombre entier posi-

tif, la fluente de $\dot{A} \frac{x^r}{a^r}$ qui est produite, pendant que x croît

depuis 0 jusques à ce qu'il devienne $= a$, est $A. \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \&c.$ ces fractions étant continuées jusques à ce que leur nombre soit $= r$, & A étant supposé représenter la demi-circonférence sur

le diamètre A . Donc, puisque $\dot{Q} = \frac{bb\dot{A}}{a\sqrt{aE}} \left(1 + \frac{x}{2E} + \frac{3xx}{8EE} \right.$

$\left. + \frac{5x^3}{16E^3} + \&c. \right)$ il suit que $Q = \frac{Nb\dot{b}}{\sqrt{aE}} \left(1 + \frac{4E}{a} + \frac{9a^2}{64E^2} \right.$

$\left. \frac{25a^3}{256E^3} + \&c. \right)$ De même $\dot{Q} = \frac{bb}{a} \cdot \frac{\dot{x}}{2\sqrt{Ex - xx}} \left(1 - \frac{x}{a} \right)^{-\frac{1}{2}}$.

Où Q est comparé avec un arc de cercle sur le diamètre E , dont le sinus verse est $= x$.

808. Soit $\dot{Q} = \frac{-p^2\dot{p}}{\sqrt{aa - pp}\sqrt{bb - pp}}$ & $\dot{A} = \frac{-a\dot{p}}{\sqrt{aa - pp}}$,

donc $\dot{Q} = \frac{A\dot{p}^2}{a} \times \left(1 + \frac{pp}{ab} - \frac{1}{2} = \frac{\dot{A}}{ab} \cdot (p^2 - \frac{p^4}{2b^2} + \frac{3p^6}{8b^4} \right.$

$\left. - \&c. \right)$ Donc la fluente Q , produite entre les termes où $p = 0$,

& $p = a$, est $\frac{Na}{b} \left(\frac{1}{2} - \frac{3a^2}{16b^2} + \frac{15a^4}{128b^4} - \frac{175a^6}{8192b^6} + \&c. \right)$

Cette fluente est le dernier excès de la tangente EP sur l'arc hyperbolique

hyperbolique AE, c'est-à-dire, la limite de cet excès pendant que la figure est produite, ou (selon l'expression ordinaire) l'excès de l'asymptote sur la courbe AE, lorsque l'une & l'autre sont supposées prolongées à l'infini. En supposant $aa - pp = ax$, $\dot{Q} = \frac{\dot{x} \sqrt{a} \sqrt{ax - xx}}{2x \sqrt{E - x}}$, on trouvera la même fluente

(par l'article 792.) $= \frac{Na}{2} \sqrt{\frac{a}{E}} + \frac{aA}{2.4E} + \frac{9aB}{4.6E} + \frac{25aC}{6.8E} + \frac{47aD}{8.10E} + \&c.$ ou A marque, à la manière ordinaire, le premier terme $\frac{Na}{2} \sqrt{\frac{a}{E}}$, B le second $\frac{aA}{8E}$, C le troisième terme, & ainsi de suite.

809. Il suit, de ce que l'on a fait voir ci-devant, articles 792; 799, &c. que lorsque r est un nombre entier, la fluente de

$\frac{\frac{r}{2} - 1}{z^4} \dot{z}$ est assignable par les arcs des sections coniques ;

c'est-à-dire, par des lignes droites lorsque r est $= 4$, ou un multiple de 4 ; par les arcs circulaires & paraboliques (qui peuvent se réduire aux logarithmes) joints à des lignes droites, lorsque r est un autre nombre pair ; par les arcs d'une hyperbole équilatère avec des lignes droites, lorsque r est un nombre de la suite 3, 7, 11, 15, &c. & par les arcs de la même hyperbole, & des lignes droites, avec les arcs d'une ellipse, qui a son excentricité égale au second axe, lorsque r est un des nombres 1, 5, 9, 13, &c. Car, si l'on suppose $z^n = xx$, la Fluxion propo-

sée deviendra $\frac{\frac{r}{2} - 1}{n \sqrt{e + fxx}} \dot{x}$; lorsque $r = 3$ $\frac{r}{2} - 1 = \frac{1}{2}$, &

l'on trouve la fluente, par l'art. 799, ou 800. mais lorsque $r = 1$, $\frac{r}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$, & la fluente se trouve, par l'article 802.

810. Soit n une fraction quelconque ; on demande la fluente de Fig. 310.

$\frac{x^n \dot{x}}{\sqrt{xx - 1}}$, ou $\frac{z^{n-1} \dot{z}}{\sqrt{1 - zz}}$. Pour cela soit AL, une des figures

construites dans l'article 392. ou le point S, & la droite AE sont supposées données de position, SA est perpendiculaire à

AE en A, M est un point sur AE, & la raison de l'angle ASL à ASM, & celle du logarithme du rayon SL au logarithme de SM sont toujours la même raison invariable de n à 1; c'est-à-dire, $ASL : ASM :: n : 1$, & $SL : SA :: SM^{\overline{+}n} : SA^{\overline{+}n}$. Soit $SA = 1$, $SM = x$, $SL = r$, l'arc $AL = s$; par conséquent $r = x^{\overline{+}n}$, $\dot{r} = \overline{+} n x^{\overline{+}n-1} \dot{x}$, & (par l'article 392.) $\dot{s} : \overline{+} \dot{r} ::$

$SM : AM :: x : \sqrt{xx-1}$, ou $\dot{s} = \frac{n x^{\overline{+}n} \dot{x}}{\sqrt{xx-1}}$. Donc la fluente

de $\frac{x^{\overline{+}n} \dot{x}}{\sqrt{xx-1}}$ est $\frac{1}{n} s = \frac{1}{n} AL$. Si Am est perpendiculaire à

SM en m , ou à $Sm = \frac{1}{x}$; par conséquent si l'on suppose $Sm = z$, la fluente de $\frac{-z^{n-1} \dot{z}}{\sqrt{1-zz}}$ fera $= \frac{1}{n} AL$. En supposant z

$= \sqrt{1-yy}$, & $n = 2 - 2k$, $\frac{\dot{y}}{(1-yy)^k}$ devient $\frac{-z^{n-1} \dot{z}}{\sqrt{1-zz}}$, &

fluente de $\frac{1}{n} AL$. En supposant $y^m = z^2$, $\frac{y^{\frac{nm}{2}-1} \dot{y}}{\sqrt{1-y^m}}$ devient

$\frac{2z^{n-1} \dot{z}}{m\sqrt{1-zz}}$, & fluente de $\frac{2}{mn} AL$. Ce sont là les figures qui

donnent la solution des cas les plus simples des Problèmes de différentes especes dans le premier Livre, art. 436, 569, &c.

Fig. 311.

811. Soit Al , Ap , AL , AP , &c. la suite des figures décrites dans l'article 212. où l'on suppose que chaque courbe est toujours déterminée par les intersections des tangentes des courbes précédentes, avec les perpendiculaires respectives à ces tangentes menées du point donné S. Soit AL une figure de l'espece décrite dans le dernier article; c'est-à-dire, que l'angle ASL soit à ASM , & le logarithme SL au logarithme SM toujours en même raison invariable. Alors Al , Ap , AP , & toutes les autres figures de la suite seront également de cette espece. Par l'article 212. l'angle $ASl = ASL \mp 2ASM$, $Sl = x^{\overline{+}n \mp 2}$, & la Fluxion de Al à celle de AL , comme la Fluxion de Sl à celle de SL , ou comme $(n \mp 2) x^{\overline{+}2}$ à

n ; par conséquent la Fluxion de Al est $\frac{n-1}{n} s x^{\frac{n-1}{n}}$, & l'arc Al peut se déterminer par s , & par des quantités Algébriques, par l'article 792. On doit dire la même chose de tous les autres arcs de la suite pris alternativement, c'est-à-dire, du second, quatrième, sixième, &c. depuis AL . Les autres courbes, dans la série Ap , AP , &c. peuvent toutes se déterminer par AP , & par des lignes droites; mais les arcs de deux figures, qui se succèdent immédiatement dans la série, comme de AP & AL ne peuvent pas se comparer l'un avec l'autre, par une équation Algébrique. Lorsqu'on suppose que ApS est un demi-cercle sur le diamètre SA , l se confond avec A , & Al disparaît, AL & les arcs suivans dans la série, pris alternativement, (qui ont tous une pointe en S) peuvent se déterminer par des lignes droites, mais les autres arcs, dans la série, sont déterminés par l'arc circulaire Ap , & par des lignes droites. Lorsqu'on suppose que AL se confond avec la droite même AM (ou $n=1$) se confond avec A , & AP disparaît, Ap est une parabole commune, qui a son foyer en S , Al & les arcs, dans la série continuées en arriere, pris alternativement depuis Al , ont une parfaite rectification; mais les autres arcs, dans la même série, sont mesurées par les arcs paraboliques, & par des lignes droites. De toutes les figures dans lesquelles l'angle ASL est à ASM , & le logarithme SL au logarithme SM en même raison invariable, il n'y a que celles-ci qui paroissent avoir une parfaite rectification, ou une mesure exacte par les arcs circulaires, ou par les logarithmes. Lorsque AL est une hyperbole équilatère, qui a son centre en S (ou $n=\frac{1}{2}$) les courbes prises alternativement des deux côtés, depuis AL , dans la série, sont mesurées par AL avec un arc elliptique, (décrit ci-devant, article 802.) & par des lignes droites. En supposant $n=\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, &c. on formera d'autres suites de courbes. Et chaque suite de ces courbes donne deux sortes distinctes de fluentes, qui ne peuvent pas se comparer l'une avec l'autre, ou avec celles d'une différente suite de cette espece.



C H A P I T R E I V.

De l'aire lorsque l'ordonnée & la base sont exprimées par des fluentes. Du calcul des fluentes par les sommes des progressions, ou des sommes des progressions par les fluentes, & des autres branches de cette Méthode.

812. **L**A base étant représentée par z , & l'ordonnée de la figure par y , la Fluxion de l'aire est $\dot{z}y$. Si y & z sont toutes deux déterminées, en termes Algébriques communs, par des quantités composées de la même quantité variable x , la Fluxion de l'aire sera exprimée par de telles quantités multipliées par $\dot{x}$. Ayant insisté dans les Chapitres précédens, sur les fluentes qui ont de pareilles expressions, nous allons examiner l'aire, ou la fluente, lorsque l'ordonnée est elle-même déterminée par une aire, ou par une fluente, ou lorsque l'ordonnée, & la base sont toutes deux exprimées par des fluentes : & en ce cas, il suffira de réduire l'aire de la figure aux fluentes de la première espèce, comme aux arcs circulaires & aux logarithmes, ou aux arcs elliptiques & hyperboliques, ou, en général, aux fluentes des expressions, qui ne renferment qu'une seule quantité variable, en termes Algébriques, avec sa Fluxion. En ce cas, nous trouverons que l'aire totale (ou celle qui appartient à une base donnée) peut quelquefois se mesurer par les arcs circulaires, ou par les logarithmes, quoiqu'il ne paroisse pas dans les mêmes exemples, que l'on puisse déterminer, de cette manière, la partie de l'aire qui appartient à chaque segment de la base qui puisse être proposé. Soient, par exemple, ADa , BEb des cercles concentriques, CB étant moindre que CA . Soit AG tangente en A , & T un point quelconque sur AG . Joignez CT qui coupe le cercle BEb en V & v . Soit maintenant la figure $CHKR$ construite, en sorte que la base CR soit toujours égale au logarithme de la raison de $CT + AT$ à CA & l'ordonnée RK toujours égale à la raison de Tv à TV , le module

étant CA. Toute l'aire CHKLRC, produite par l'ordonnée RK, pendant que le point V, décrit le quart BVE, sera égale au rectangle compris sous le quart AFD, & sous l'arc DF, dont le sinus est CB; mais il ne paroît pas que la partie de cette aire CHKR qui appartient à chaque base donnée CR, puisse se mesurer de cette maniere. Les fluentes de cette espece sont quelquefois requises dans la résolution de quelques Problèmes utiles, & la mesure de l'aire totale est communément ce qu'ils ont de plus avantageux. Mais avant que de traiter de l'aire, lorsque l'ordonnée & la base sont toutes deux exprimées par des fluentes, il faut donner quelques Théorèmes concernant l'aire dont l'ordonnée seule est exprimée de cette maniere.

813. Que A représente une aire sur la base x , soit $A\dot{x} = \dot{K}$, $K\dot{x} = \dot{L}$, $L\dot{x} = \dot{M}$, $M\dot{x} = \dot{N}$, &c. K représentant l'aire lorsque l'ordonnée est A, L l'aire lorsque l'ordonnée est K, M lorsque l'ordonnée est L, & ainsi de suite. Soit $x\dot{A} = \dot{B}$, $x\dot{B} = \dot{C}$, $x\dot{C} = \dot{D}$, $x\dot{D} = \dot{E}$, &c. & supposant $B\dot{x} = \dot{k}$, $k\dot{x} = \dot{l}$, $l\dot{x} = \dot{m}$, $m\dot{x} = \dot{n}$, &c. Nous aurons $K = xA - B$, $2L = xK - k$, $3M = xL - l$, $4N = xM - m$, & ainsi de suite. Car, puisque $A\dot{x} + x\dot{A} = \dot{K} + \dot{B}$, il suit, en prenant les fluentes, (article 738.) que $Ax = K + B$, & $K = Ax - B$; puisque $K\dot{x} + x\dot{K} - \dot{k} = \dot{L} + Ax\dot{x} - B\dot{x} = \dot{L} + (Ax - B)\dot{x} = \dot{L} + K\dot{x} = 2\dot{L}$, en prenant les fluentes $xK - k = 2L$. De même, $L\dot{x} + x\dot{L} - \dot{l} = \dot{M} + Kx\dot{x} - k\dot{x} = \dot{M} + 2L\dot{x} = 3\dot{M}$, & $3M = xL - l$; $M\dot{x} + x\dot{M} - \dot{m} = \dot{N} + Lx\dot{x} - l\dot{x} = \dot{N} + 3M\dot{x} = 4\dot{N}$, & $4N = xM - m$, & ainsi de suite.

814. De même, que $K = xA - B$, il est évident que $k = xB - C$; par conséquent $2L = xK - k = xx A - xB - xB + C = x^2 A - 2xB + C$, & $2l = x^2 2x C + D$. Ainsi $6M$ (par le dernier article) $= 2xL - 2l = x(x^2 A - 2xB + C) - (x^2 B - 2xC + D) = x^3 A - 3x^2 B + 3xC - D$, & $6m = x^3 B - 3x^2 C + 3xD - E$; $24N = 6xM - 6m = x(x^3 A - 3x^2 B + 3xC - D) - (x^3 B - 3x^2 C + 3xD - E) = x^4 A - 4x^3 B + 6x^2 C - 4xD + E$. Et de cette maniere, il est

évident que si r marque la place de chaque fluente Z dans la série

$$K, L, M, N, \&c. Z = \frac{x^r A - r x^{r-1} B + r \frac{r-1}{2} x^{r-2} C - \&c.}{1. 2. 3. 4. \dots r.}$$

qui est la première partie de la Prop. XI. de *quadrat. curvar.* Lors-

$$\text{que } x = a, Z = \frac{a^r A - r a^{r-1} B + r \frac{r-1}{2} a^{r-2} C - \&c.}{1. 2. 3. \dots r.}$$

$$815. \text{ Soit } \dot{z} = (a - x)^r \dot{A} = a^r \dot{A} - r a^{r-1} x \dot{A} + r \frac{r-1}{2} a^{r-2} x^2 \dot{A} - \&c. = a^r \dot{A} - r a^{r-1} \dot{B} + r \frac{r-1}{2} a^{r-2} \dot{C} - \&c.$$

$$\text{par conséquent } z = a^r A - r a^{r-1} B + r \frac{r-1}{2} a^{r-2} C - \&c.$$

& lorsque $x = a$, $Z = \frac{z}{1. 2. 3. \dots r}$, qui est la seconde partie de la même Proposition.

816. Soit $x \dot{A} = \dot{P}$, $P \dot{A} = \dot{Q}$, $Q \dot{A} = \dot{R}$, $R \dot{A} = \dot{S}$, &c. la fluente de $A^n \dot{x}$ sera $= x A^n - n A^{n-1} P + n(n-1) A^{n-2} Q - n(n-1)(n-2) A^{n-3} R - \&c.$ Car, par l'article 738, la fluente de $A^n \dot{x}$ est $x A^n - F$, $n A^{n-1} x \dot{A}$ (la lettre F marque la fluente de l'expression qui suit immédiatement) $= x A^n - F$, $n A^{n-1} \dot{P} = x A^n - n A^{n-1} P + F$, $n(n-1) A^{n-2} \dot{Q} = x A^n - n A^{n-1} P + n(n-1) A^{n-2} Q - F$, $n(n-1)(n-2) A^{n-3} \dot{R} = x A^n - n A^{n-1} P + n(n-1) A^{n-2} Q - n(n-1)(n-2) A^{n-3} R + F$, & ainsi de suite.

$$817. \text{ Par exemple, soit } \dot{A} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{1 \mp x x}}, \& K \text{ fluente de } A \dot{x}$$

sera $x A - B =$ (parce que $\dot{B} = x \dot{A} = \frac{x \dot{a}}{\sqrt{1 \mp x x}}$, & $B = \mp \sqrt{1 \mp x x} x A \mp \sqrt{1 \mp x x}$; parce que les fluentes $B, C, D, \&c.$ sont exprimées par des arcs circulaires, ou par des logarithmes, avec des quantités Algébriques: selon que A est lui-même un arc circulaire, ou logarithme, on doit dire la même chose des fluentes $K, L, M, N, \&c.$ par l'article 814.

$$\text{Soit } \sqrt{1 \mp x x} = z; \text{ on aura } \dot{A} = \frac{\dot{x}}{z}, \dot{P} = x \dot{A} = \frac{x \dot{x}}{z} =$$

$$\dot{z} = \dot{z}, \& P = \dot{z}; \dot{Q} = P \dot{A} = \dot{z} \dot{x}, \& Q = \dot{z} x; \dot{R} = Q \dot{A} = \dot{z} \frac{\dot{x} x}{x} = \dot{z}, \& R = z; \dot{S} = R \dot{A} = \dot{z} x, \& S = x.$$

Donc la fluente de $A^n \dot{x}$ est $x A^n \pm n A^{n-1} z \mp n(n-1) A^{n-2} x \mp n(n-1)(n-2) A^{n-3} z \pm n(n-1)(n-2)(n-3) A^{n-4} x \pm \&c.$

818. Supposant $\dot{A} = y \dot{x}$, $\dot{B} = x \dot{A} = y x \dot{x}$; si l'on peut exprimer y par x , $\dot{B}$ sera exprimé par une Fluxion qui renferme une quantité variable seulement (qui est x) avec sa Fluxion, & si A & B peuvent se réduire à des quantités Algébriques, ou à des arcs circulaires, ou à des logarithmes, par les articles précédens, on doit dire la même chose de K fluente de $A \dot{x}$, parce que $K = x A - B$. Il est clair, que si A & x sont assignables l'une par l'autre, $A \dot{x}$ ou $\dot{K}$ peut aisément s'exprimer par une Fluxion qui renferme seulement une quantité variable (sçavoir x ou A) avec sa Fluxion; & la fluente de $A \dot{x}$ peut, en plusieurs cas, se déterminer par des quantités Algébriques, ou se comparer avec les arcs circulaires, ou avec les logarithmes, par les articles précédens. Mais, outre ces cas plus communs, il y en a d'autres où la fluente de $\dot{x} F$, $y \dot{x}$ (ou de $A \dot{x}$) peut se réduire à celles que nous avons examinées ci-devant.

819. La base d'une figure étant représentée par z , & l'ordonnée par y , soit $\dot{z} = \dot{x} x^{r-n-1} (E + F x^n)^{l-1}$, & $\dot{y} = \dot{x} x^{s-n-1} (e + f x^n)^k$, & soit $x = d$ lorsque $E + F x^n = 0$ (c'est-à-dire, soit $d^n = -\frac{E}{F}$); si $r + s + l + k = 0$, l'aire de la figure (ou la fluente de $\dot{z} y$) qui est produite, pendant que x , en fluant depuis 0, devient $= d$, sera égale aux fluentes simultanées de $x^{r+n+s-1} \dot{x} (E + F x^n)^{l-1}$, & $x^{s-n-1} \dot{x} (e + f x^n)^{k+l}$ multipliées par $\frac{1}{e d^{s+n}}$. C'est-à-dire, soient Q , G & P qui représen-

tent les différentes fluentes de $\dot{x} x^{r-n-1} (E + F x^n)^{l-1} \times F$, $\dot{x} x^{s-n-1} (e + f x^n)^k$, $\dot{x} x^{r+n+s-1} (E - F x^n)^{l-1}$, & $\dot{x} x^{s-n-1}$

$(e + fx^n)^{k+l}$ qui sont produites, pendant que x , en fluant depuis o , devient $= d$; on aura $Q = \frac{GP}{e^l d^{sn}}$. Car, par la suppo-

sition, $\frac{\dot{y}}{e^k} = \dot{x} x^{sn-1} \left(1 + \frac{fx^n}{e}\right)^k =$ (par le Théorème des binomes) $x^{sn-1} \dot{x} + \frac{kf}{e} x^{sn+n-1} \dot{x} + k \cdot \frac{k-1}{2} \cdot \frac{ff}{ee}$

$x^{sn+2n-1} \dot{x} + \&c. \& (A) \frac{sn y}{e^n x^{sn}} = 1 + \frac{s}{s+1} \cdot \frac{kfx^n}{e} +$

$+ \frac{s}{s+2} \cdot k \cdot \frac{k-1}{2} \cdot \frac{ffx^{2n}}{ee} + \&c.$ par conséquent $y \dot{z}$ est égal

au produit de $\frac{e^k \dot{x}}{s^n} x^{r+n+sn-1} (E + Fx^n)^{l-1}$ multiplié par cette suite. Donc, par l'article 792. si dans cette suite on substitue d à x , & si l'on multiplie les termes respectivement par 1,

$\frac{r+s}{r+s+l}, \frac{r+s}{r+s+l} \times \frac{r+s+1}{r+s+l+1}, \&c.$ ou (parce que $r+s = -l-k$, & $r+s+l = -k$) par 1, $\frac{l+k}{k}, \frac{l+k}{k} \times \frac{l+k-1}{k-1},$

&c. & supposant la suite qui en résulte, sçavoir $1 + \frac{s}{s+1}$

$(k-l) \frac{f^{dn}}{e} + \frac{s}{s+1} (k-l) \frac{k+l-1}{2} \cdot \frac{ff d^{2n}}{ee} + \&c. = L;$

nous aurons $Q = \frac{e^k}{s^n} GL$. Mais en substituant dans l'équa-

tion A, par laquelle on a déterminé la valeur de y , P pour y , $k+l$ pour k , & d pour x , il est clair que $L = \frac{s^n P}{e^k + l d^{sn}},$

par conséquent $Q = \frac{GP}{e^l d^{sn}}$. Ce Théorème est fondé sur l'arti-

cle 792. & l'on doit l'entendre avec les mêmes limitations, surtout avec celles marquées dans l'article 796. Nous avons supposé $r+s+l+k=0$, ou $s=-r-l-k$; mais on voit aisément, que si s croît ou diminue d'un nombre entier, ce Théo-

me sera utile pour découvrir la fluente de $y \dot{z}$, lorsque $x=d$, ou pour le réduire aux fluentes communes, c'est-à-dire, aux fluentes d'une quantité variable composées ensemble en termes Algébriques communs avec la fluente de cette quantité, par exemple,

exemple, $\dot{Q} = \dot{z} \cdot F, \dot{y} x^n$, & $e + f x^n = R$, on aura $\dot{Q} =$

$$= \frac{\dot{z} x^n R^{k+1}}{n f (s+k+1)} - \frac{s e y \dot{z}}{f (s+k+1)}.$$

820. Soit $x = D$ lorsque $e + f x^n = 0$, & les valeurs de $\dot{z}$ & $\dot{y}$ restant les mêmes, comme dans le dernier article, soient y, z & q les fluentes respectives de $\dot{y}, \dot{z}$ & $y \dot{z}$ lorsque $e + f x^n = 0$. Soient g & p les fluentes simultanées de $\dot{x} x^{r+n+s-1} (e + f x^n)^k$, & $\dot{x} x^{r+n-1} (E + F x^n)^{l+k}$. Si $r + s + l + k = 0$, comme auparavant, $q = YZ - \frac{g p}{E^{k+1} D^{r+n}}$. Ce Théorème suit du dernier, parce que $F, y \dot{z} = y z - F, z \dot{y}$.

821. Soit $\dot{z} = -\dot{x} x^{n-m-2} (E x^n + F)^{l-1}$, $\dot{y} = -\dot{x} x^m (e x^n + f)^k$, $x = d$ lorsque $E + F x^n = 0$, l'aire ou la fluente formée, pendant que x flue depuis qu'étant égal à d il devient infiniment grand, (ou la limite de laquelle cette aire s'approche, pendant que x croît continuellement) est le produit des fluentes de $-\dot{x} x^{n+m-k-1} (E x^n + F)^{l-1}$, & $-\dot{x} x^{m-n-l} (e x^n + f)^{k+l}$ multipliées l'une par l'autre, & par $\frac{1}{e^{l d^m + n k + 1}}$; comme on le verra en substituant x^{-1} pour x , dans l'art. 819. & supposant $m = r n + l n - 1$. La fluente de $y \dot{z}$, lorsque $e + f x^n = 0$ est l'excès du produit des valeurs correspondantes de y & z sur le produit des fluentes simultanées de $-\dot{x} x^{n-l-1} (e x^n + f)^k$, & $-\dot{x} x^{-m-n-k-2} (E x^n + F)^{l+k}$ multipliées l'une par l'autre, & par $\frac{D^{m+1-n-l}}{E^{k+1}}$, par le dernier article.

822. Par ces Théorèmes, on peut calculer des tables des fluentes de cette espèce, qui peuvent se réduire aux arcs circulaires, & aux logarithmes. Mais nous donnerons seulement quelques exemples de leur usage. Supposons qu'il soit question de trouver cette aire, ou fluente de $y \dot{z}$, lorsque m étant un nom-

bre positif, $z = \frac{\dot{x}}{x^m \sqrt{bb - xx}}$ & $y = \frac{x^{m-1} \dot{x}}{a a + xx}$, c'est-à-dire ;

de trouver la fluente de $\frac{\dot{x}}{x^m \sqrt{bb - xx}} \times F, \frac{x^{m-1} \dot{x}}{a a + xx}$, lors-

que $x = b$. En ce cas, comparant les exposans avec ceux de l'article 819. $n = 2$, $r = \frac{1-m}{2}$, $l = \frac{1}{2}$, $s = \frac{m}{2}$, & $k = -1$, enforte que $r + l + s + k = \frac{1-m+1+m}{2} - 1 = 0$, comme

l'exige le Théorème. Puisqu'en ce cas, $\dot{G} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{bb - xx}}$, &

$\dot{P} = \frac{x^{m-1} \dot{x}}{\sqrt{a a + xx}}$; il suit, que si N marque la raison de la cir-

conférence à son diamètre, la fluente requise est $\frac{N}{2ab^m} \times F, \frac{x^{m-1} \dot{x}}{\sqrt{a a + xx}}$, si l'on substitue b pour x dans la valeur de cette

dernière fluente, après qu'on l'aura déterminée. Ainsi z étant $= \text{logarithme } \frac{bb - b \sqrt{bb - xx}}{x}$, & $y = \text{logarithme } a \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$, & H représentant l'arc décrit avec le rayon a , qui a son sinus $= b$, l'aire requise sera égale à $\frac{Nb}{2} H$; d'où suit la Proposition avan-

cée dans l'article 812. car, en cet exemple, $z = \frac{b \dot{x}}{x \sqrt{bb - xx}}$,

$y = \frac{a \dot{x}}{a a - xx}$, $m = 1$, & $P = F, \frac{\dot{x}}{\sqrt{a a - xx}}$. Si la même va-

leur de z subsistant, on suppose y toujours égale à l'arc décrit avec le rayon a , qui a sa tangente égale à x , ou $y = \frac{a \dot{x}}{a a + xx}$, alors $\dot{P} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{a a + xx}}$; & dans cet exemple, la

fluente requise est $\frac{Nb a}{2} \cdot \text{logarithme } \frac{\sqrt{a a + b b} + b}{a}$; enforte

que la fluente qui, dans le premier cas, étoit le produit de deux arcs circulaires, est maintenant le produit d'un arc circulaire, par un logarithme. Si m est un nombre entier, la fluente requise

peut se mesurer par les aires des sections coniques, & si m est égal à l'une de ces fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, &c. on peut la mesurer par leurs arcs.

823. Il est clair que, dans d'autres cas, on peut calculer les fluentes par le Théorème, outre ceux où $r + s + l + k = 0$.

Supposons, par exemple, $\dot{z} = \frac{-\dot{x}}{x^3 \sqrt{bb - xx}}$, & $\dot{y} = \frac{e \dot{x}}{e + fxx}$;

Puisque $\dot{y} = \dot{x} - \frac{f x^2 \dot{x}}{e + fxx}$, $\dot{z} y = \frac{\dot{x}}{xx \sqrt{bb - xx}} - \frac{\dot{x}}{x^3 \sqrt{bb - xx}}$;

F, $\frac{-f x^2 \dot{x}}{e + fxx}$. La fluente de la première partie est déterminable en termes Algébriques, & la fluente de la seconde (selon le Théorème de l'article 819.) par des arcs circulaires & des lignes droites.

824. Il suit, de même, de l'art. 822. que si $\dot{z} = \frac{-\dot{x}}{x^h \sqrt{xx - bb}}$,

& $\dot{y} = \frac{-\dot{x}^h}{xx + aa}$, l'aire ou la fluente de $y \dot{z}$ qui est produite, pendant que x flue depuis qu'étant $= b$, il devient infini, est $\frac{N}{2 b^h} F, \frac{x^h - 1}{\sqrt{xx + aa}}$.

825. Les Théorèmes de l'article 819. servent principalement à réduire les fluentes aux arcs circulaires, ou aux logarithmes, ou à d'autres d'une forme plus simple, (& par conséquent à rendre les solutions des Problèmes plus simples & plus élégantes, que si on recouroit immédiatement aux suites infinies) lorsque ni y , ni z ne peuvent être exprimés par x en termes Algébriques. Mais ils peuvent aussi servir à trouver la fluente de $y \dot{z}$ lorsque y se détermine par x . Ainsi pour trouver la fluente de $\frac{aax}{(aa + xx) \sqrt{bb - xx}}$

lorsque $x = b$, supposant $\dot{z} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{bb - xx}}$, $y = \frac{aa}{aa + xx}$, &

par conséquent $\dot{y} = \frac{-2 aax \dot{x}}{(aa + xx)^2}$. En comparant ces valeurs de $\dot{z}$ & $\dot{y}$ avec leurs valeurs générales, dans l'article 819. $n = 2$;

244 DE L'AIRE LORSQUE L'ORDONNÉE ET LA BASE, &c.

$r = \frac{1}{2}, l = \frac{1}{2}, s = 1, k = -2$, & $r + l + s + k = 0$, comme

l'exige le Théorème. G fluente de $\frac{x^2 \dot{x}}{\sqrt{bb - xx}}$ est $\frac{Nbb}{4}$, & P

fluente de $\frac{-x \dot{x}}{(aa + xx)^{\frac{3}{2}}}$ est $\frac{1}{\sqrt{aa + xx}}$; donc, par le Théorème

de l'article 819. la fluente requise est $\frac{Na}{2\sqrt{aa + bb}}$. Nous

pourrions donner d'autres exemples, si nous n'étions pas obligés de hâter la conclusion de ce Traité, qui est déjà devenu beaucoup plus long qu'on ne l'avoit d'abord prétendu.

826. Si l'on prend une équation comme $(x + Ay)^m \times (x + By)^n = E$, dans laquelle m, n, A, B, E sont supposées in-

variables, alors (par l'article 728.) $\frac{m \dot{x} + mA \dot{y}}{x + Ay} + \frac{n \dot{x} + nB \dot{y}}{x + By}$

$= 0$, & $(m + n) x \dot{x} + (nA + mB) y \dot{x} + (mA + nB) x \dot{y}$

$+ (m + n) A B y \dot{y} = 0$. Si l'on avoit pris $(x + Ay)^m y^n = E$,

alors $m y \dot{x} + n x \dot{y} + (m + n) A y \dot{y} = 0$, ou le terme $x \dot{x}$ ne

se trouve pas. Lorsqu'une équation fluxionnelle proposée peut

se réduire à une forme de cette espece, en comparant les coeffi-

ciens avec ceux de l'équation de même forme, on peut déter-

miner les valeurs de m, n, A , &c. & trouver l'équation des

fluentes; comme on l'a fait voir plus au long, *Comment. Petropol.*

Tom. I. &c.

827. Lorsqu'une aire, ou fluente est réduite à une fuite, par

les Méthodes exposées dans les articles 745. &c. la fuite, dans

certain cas, est si peu convergente, qu'elle est fort peu utile à

la découverte de l'aire. Soit FMf une hyperbole équilatere qui

a son centre en O, & dont Oa est une asymptote; soit OA = 1,

AP = x PM = y, on aura $y = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3$

+ &c. ce qui donne l'aire APMF = F, $y \dot{x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

$- \frac{x^4}{4} + \&c.$ & si AB = 1, l'aire AB EF = $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$

$+ \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \&c. = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \&c.$ qui est la fuite dont on

a parlé dans l'article 361. pour la quadrature de l'hyperbole;

(ou pour trouver le logarithme de 2.) Mais cette fuite est si

Fig. 313.

peu convergente, que la somme des 1000 premiers termes (Stirling. *de summat. serierum*, p. 28.) s'écarte de la vraie valeur de l'aire à la cinquième décimale. On peut trouver d'autres exemples semblables à celui-ci, où il est plus aisé de calculer l'aire par les polygones inscrits, que par la série. Il faut avoir d'autres regles pour calculer l'aire en pareils cas, & nous en avons donné des exemples dans l'art. 361. On en trouvera d'autres dans plusieurs Auteurs, & surtout dans ceux qui ont traité du calcul des logarithmes & de la mesure du cercle. Les Théorèmes suivans, dérivés de la Méthode des Fluxions, peuvent servir à ce dessein, & on les employe dans la solution de plusieurs Problèmes qui se rapportent ordinairement à ce qu'on appelle la *Méthode différentielle* de Newton.

828. Soit la base $AP = z$, l'ordonnée $PM = y$, & la base Fig. 314.

étant supposée fluer uniformément, soit $z = 1$. Que la première ordonnée AF soit représentée par a , $AB = 1$, & l'aire $ABEF = A$. Comme A est l'aire produite par l'ordonnée y , soient aussi B, C, D, E, F , &c. les aires sur la même base AB , produites

par les ordonnées respectives $\dot{y}, \ddot{y}, \ddot{\ddot{y}}, \ddot{\ddot{\ddot{y}}}$, &c. On aura $AF = a = A - \frac{B}{2} + \frac{C}{12} - \frac{F}{720} + \frac{G}{30240} - \&c.$ Car, par l'article

752. $A = a + \frac{\dot{a}}{2} + \frac{\ddot{a}}{6} + \frac{\ddot{\ddot{a}}}{24} + \frac{\ddot{\ddot{\ddot{a}}}}{120} + \&c.$ d'où suit l'é-

quation (Q) $a = A - \frac{\dot{a}}{2} - \frac{\ddot{a}}{6} - \frac{\ddot{\ddot{a}}}{24} - \frac{\ddot{\ddot{\ddot{a}}}}{120} - \&c.$ De

même, $\dot{a} = B - \frac{\ddot{a}}{2} - \frac{\ddot{\ddot{a}}}{6} - \frac{\ddot{\ddot{\ddot{a}}}}{24} - \&c.$ $\ddot{a} = C - \frac{\ddot{\ddot{a}}}{2} - \frac{\ddot{\ddot{\ddot{a}}}}{6} - \&c.$ $\ddot{\ddot{a}} = E - \&c.$ Si, par le moyen des dernières équations,

on chasse $\dot{a}, \ddot{a}, \ddot{\ddot{a}}, \ddot{\ddot{\ddot{a}}}$, &c. de la valeur de a dans l'équation Q, on trouvera $a = A - \frac{B}{2} + \frac{C}{12} - \frac{E}{720} + \&c.$ On continuera

les coefficients de la manière suivante : que k, l, m, n , &c. marquent les coefficients respectifs de $\dot{a}, \ddot{a}, \ddot{\ddot{a}}, \ddot{\ddot{\ddot{a}}}$, &c. dans l'é-

quation Q; c'est-à-dire, soit $k = \frac{1}{2}, l = \frac{1}{6}, m = \frac{1}{24}, n = \frac{1}{120}$, &c. supposons $K = k = \frac{1}{2}, L = kK - l = \frac{1}{12}, M = kL - lK + m = 0, N = kM - lL + mK - n = -\frac{1}{720}$, & ainsi de suite; on aura $a = A - KB + LC - MD + NE - \&c.$ ou les coefficients des aires alternatives D, F, H , &c. disparaissent.

829. Comme A est la fluente de $y \dot{z}$, ainsi B est celle de $\dot{y} \dot{z}$, C de $\ddot{y} \dot{z}$, E de $\ddot{\dot{y}} \dot{z}$, &c. Donc puisque $\dot{z} = 1$, & que ces aires sont produites, pendant que l'ordonnée PM se meut de AF en BE, l'aire B s'exprimera par l'excès de la dernière ordonnée BE sur la première AF; C, par la différence des Fluxions des ordonnées; (ayant égard aux signes de ces Fluxions) E par la différence de leurs troisièmes Fluxions, & les autres aires G, I, &c. par les différences respectives de leurs Fluxions d'ordres correspondans plus élevés. Donc, si a représente BE—AF différence des ordonnées, & β, δ, ζ , &c. les différences de leurs Fluxions des ordres premier, troisième, cinquième, &c. alors $a = A - \frac{a}{2} + \frac{\beta}{12} - \frac{\delta}{720} + \frac{\zeta}{30240} + \text{\&c.}$

830. Supposant maintenant la base Aa divisée, en parties successives égales AB, BC, CD, &c. & chaque partie égale à l'unité, soit la somme des ordonnées équidistantes AF, BE, CK, &c. excepté la dernière af, représentée par S, l'aire totale AFfa sur la base Aa, par A, l'excès de af sur AF, par a, les excès respectifs de leurs première, troisième, cinquième Fluxions, &c. par β, δ, ζ , &c. la Fluxion de la base étant supposée = 1, il suit du dernier article, que $S = A - \frac{a}{2} + \frac{\beta}{12} - \frac{\delta}{720} + \frac{\zeta}{30240} - \text{\&c.}$ & $A = S + \frac{a}{2} - \frac{\beta}{12} + \frac{\delta}{720} - \frac{\zeta}{30240} + \text{\&c.}$ ce qui donne deux des Théorèmes, dont on a parlé dans les articles 352 & 353. où nous avons principalement en vue les figures hyperboliques. Cette Proposition exprimée plus généralement, sans supposer z ou $\dot{z} = 1$, est que $S = \frac{A}{z} - \frac{a}{2} + \frac{z\beta}{12z} - \frac{z^3\delta}{720z^3} + \frac{z^5\zeta}{30240z^5} - \frac{z^7\theta}{110960z^7} + \text{\&c.}$

831. L'ordonnée AF étant toujours représentée par a , soient AR & Ar prises des côtés opposés du point A, égales l'une à l'autre, RV & rv ordonnées en R & r, terminent l'aire RVvr; que y représente chaque ordonnée comme PM de la figure, & la base étant supposée fluir uniformément, que A, C, E,

&c. représentent les aires sur la base Rr , qui sont produites par

les ordonnées respectives $y, \ddot{y}, \ddot{\ddot{y}}, \&c.$ Supposant $AR = z$,

$$\text{l'ordonnée du milieu } AF (=a) = \frac{A}{2z} - \frac{zC}{12\dot{z}^2} + \frac{7z^3E}{720\dot{z}^4}$$

$$- \frac{31z^5G}{30240\dot{z}^6} + \&c. \text{ Car, par l'art. 752. } \frac{RrvV}{2z} = \frac{A}{2z} = a +$$

$$+ \frac{z^2\ddot{a}}{2.3\dot{z}^2} + \frac{z^4\ddot{\ddot{a}}}{2.3.4.\dot{z}^4} + \&c. \text{ ou } a = \frac{A}{2z} - \frac{z^2\ddot{a}}{6\dot{z}^2} - \frac{z^4\ddot{\ddot{a}}}{120\dot{z}^4}$$

$$- \&c. \text{ De même, } \ddot{a} = \frac{C}{2z} - \frac{z^2\ddot{\ddot{a}}}{6\dot{z}^2} - \&c. \ddot{\ddot{a}} = \frac{E}{2z} - \&c.$$

par où, en chassant $\ddot{a}, \ddot{\ddot{a}}$ de la valeur de a , on trouve la vérité du Théorème. Les coefficients de $C, E, G, \&c.$ se continuent

en cette manière. Que les différens coefficients de $\ddot{a}, \ddot{\ddot{a}}, \&c.$ dans la valeur de $\frac{A}{2z}$ (dérivée de l'article 752.) soient représentés par $k, l, m, n, \&c.$ c'est-à-dire, soit $k = \frac{z^2}{2.3.\dot{z}^2}, l = \frac{z^4k}{4.5.\dot{z}^2},$

$$m = \frac{z^2l}{6.7.\dot{z}^2}, n = \frac{z^2m}{8.9.\dot{z}^2}, \&c. \& \text{ soit } K = \frac{k}{2z} = \frac{z}{12\dot{z}^2}, L$$

$$= kK - \frac{l}{2z}, M = kL - lK + \frac{m}{2z}, N = kM - lL + mK$$

$$- \frac{n}{2z}, \&c. \text{ Les valeurs des coefficients } K, L, M, N, \&c. \text{ étant ainsi calculées, on aura } a = \frac{A}{2z} - KC + LE - MG$$

$$+ NI - \&c. \text{ Puisque les aires } C, E, \&c. \text{ sont les fluentes res-}$$

pectives de $\ddot{y}z, \ddot{\ddot{y}}z, \&c.$ si les différences respectives de la première, troisième, cinquième, septième & plus hautes Fluxions alternatives des ordonnées rv & RV sont exprimées par $\beta,$

$$\delta, \zeta, \theta, \&c. \text{ on aura } a = \frac{A}{2z} - \frac{z\beta}{12\dot{z}} + \frac{7z^3\delta}{720\dot{z}^3} - \frac{31z^5\zeta}{30240\dot{z}^5}$$

$$+ \frac{127z^7\theta}{1209600\dot{z}^7} - \&c.$$

832. De-là, il suit que si $AF, BE, CK, \&c.$ sont une suite  d'ordonnées équidistantes sur la base Aa , dont AF est la pre-

miere, & af la dernière; AB leur commune distance $= 2z$; AR , prise de l'autre côté de A , $= z$, ou $\frac{1}{2}AB$, les ordonnées RV & rv terminant l'aire $RVvr$; & cette aire étant représentée par A , les différences par où la première, troisième, cinquième, septième & plus hautes Fluxions alternatives de rv , surpassent les mêmes Fluxions de RV , étant exprimées par β , δ , ζ , θ , &c. & la somme des ordonnées AF , BE , CK , &c.

(y compris af) par S , on aura $S = \frac{A}{2z} - \frac{z\beta}{12z} + \frac{7z^3\delta}{720z^3}$

$$- \frac{31z^5\zeta}{30240z^5} + \frac{127z^7\theta}{1209600z^7} - \frac{511z^9\kappa}{47900160z^9} + \text{\&c.} \quad A = 2zS$$

$$+ \frac{z^2\beta}{6z} + \frac{7z^4\delta}{360z^3} - \frac{31z^6\zeta}{15120z^5} + \frac{127z^8\theta}{604800z^7} - \frac{511z^{10}\kappa}{23950080z^9}$$

+ &c. Si l'on suppose $AB = 1$, & $z = 1$, on aura $z = \frac{1}{2}$, &

$$S = \frac{\beta}{24} + \frac{7\delta}{5760} - \frac{31\zeta}{967680} + \frac{127\theta}{15482880} - \text{\&c.} \quad \& A$$

$$= S + \frac{\beta}{24} - \frac{7\delta}{5760} + \frac{31\zeta}{967680} - \text{\&c.} \text{ qui sont les deux}$$

autres Théorèmes, dont on a fait mention dans les articles 352 & 353. seulement pour renfermer le terme af , on prend ici ar au-delà du point a , au lieu qu'on avoit exclu af , & pris ar d'un côté opposé.

833. L'usage de ces Théorèmes paroîtra mieux, par les exemples. 1°. Soit $m, m+e, m+2e, m+3e, \dots, n$, une suite de nombres en progression arithmétique, ou m marque le premier terme, e leur différence commune, & n le dernier terme; si r est un nombre positif, ou négatif quelconque, (excepté -1) S la somme des puissances de ces nombres de l'exposant r , c'est-à-dire, $m^r + (m+e)^r + (m+2e)^r + \dots + n^r = \frac{1}{(r+1)e}$

$$(n^{r+1} - m^{r+1} +) \frac{n^r + m^r}{2} + \frac{re}{12} (n^{r-1} - m^{r-1}) - \frac{r \cdot r - 1 \cdot r - 2 \cdot e^3}{720} (n^{r-3} - m^{r-3}) + \text{\&c.} \text{ Car, supposant}$$

Fig. 314.
N. 1. & 2.

$OP = x$, $PM = y$, soit FMf une parabole, ou une hyperbole, dont l'équation est $y = x^r$, $OA = m$, $Oa = n$, par conséquent $AF = m^r$, $af = n^r$, $F.y\dot{x} = F.x^r\dot{x} = \frac{x^{r+1}}{r+1}$, & l'ai-

re

re $AFfa = A = \frac{n^{r+1} - m^{r+1}}{r+1}$; $af - AF = a = n^r - m^r$;

$\dot{y} = r x^{r-1} \dot{x}$, & supposant $\dot{x} = \dot{z} = 1$, la différence des Fluxions de af & AF est $r n^{r-1} - r m^{r-1} = \beta$; $\ddot{y} = r(r-1)$

$\times (r-2) x^{r-3} \dot{x}$, & $\delta = r \cdot r-1 \cdot r-2 \cdot (n^{r-3} - m^{r-3})$. On calculera, de même, ζ , θ , &c. & il suit, de l'article 830.

que $S - n^r = \frac{n^{r+1} - m^{r+1}}{(r+1)e} - \frac{n^r - m^r}{2} + \frac{re}{12} (n^{r-1} - m^{r-1}) - \frac{m^{r-1}}{2} - \&c.$ Donc $S = \frac{n^{r+1} - m^{r+1}}{(r+1)e} + \frac{n^r + m^r}{2}$

$+ \frac{re}{12} (n^{r-1} - m^{r-1}) - \&c.$ En supposant $e = 1$, & $m = 0$, il suit, que la somme des puissances des nombres 0, 1, 2, 3,

4, ... n , d'un exposant entier & positif r est $\frac{n^{r+1}}{r+1} + \frac{n^r}{2}$

$+ \frac{r n^{r-1}}{12} - \frac{r \cdot r-1 \cdot r-2 \cdot n^{r-3}}{720} + \&c.$ cette suite étant continuée à un nombre de termes aussi grand qu'il y a d'unités dans

$2 + \frac{r-1}{2}$ seulement, lorsque r est un nombre impair : parce

que lorsque $r = 1$, les Fluxions de AF & af sont égales, & $\beta = 0$; lorsque $r = 3$, $\delta = 0$, lorsque $r = 5$, $\zeta = 0$, &c. Ainsi

r étant $= 1$, $S = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$; si $r = 2$, $S = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$,

& si $r = 3$, $S = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}$. C'est le Théorème donné

par M. Jacques Bernoulli *Ars conjectandi*, p. 97. Lorsque r est une fraction, ou un nombre négatif, la somme des puissances

des mêmes nombres (en supposant $m = 1$) est $\frac{n^{r+1} - 1}{r+1}$

$\frac{n^{r+1}}{2} + \frac{r n^{r-1} - r}{12} - \frac{r \cdot r-1 \cdot r-2}{720} (n^{r-3} - 1) + \&c.$

834. La somme S des mêmes puissances de $m+e$, $m+3e$, $m+5e$, $m+7e$, ... $n-e$, dont la commune différence est $2e$, étant calculée par le Théorème de l'article 832. en supposant $OR = m$, $RA = e = ar$, $Or = n$, (& calculant l'aire $RVvr$, avec les différences de la première, troisième & plus hautes Fluxions alternatives de rv & RV) est $\frac{1}{(r+1)2e}$

$$\begin{aligned}
& (n^{r+1} - m^{r+1}) - \frac{re}{12} (n^{r-1} - m^{r-1}) + \frac{7r(r-1)r-2e^3}{720} \\
& (n^{r-3} - m^{r-3}) - \frac{31r.r-1.r-2.r-3.r-4}{30240} e^5 (n^{r-5} - m^{r-5}) + \&c. \text{ En supposant } m=e=\frac{1}{2}, \text{ ces nombres fe-} \\
& \text{ront } 1, 2, 3, 4, 5, \dots n - \frac{1}{2}, \& S = \frac{n^{r+1}}{r+1} - \frac{r n^{r-1}}{24} \\
& + \frac{7r.r-1.r-2.n^{r-3}}{5760} - \frac{31r.r-1.r-2.r-3.r-4}{967680} n^{r-5} \\
& + \&c. - \frac{1}{(r+1)2^{r+1}} + \frac{r}{24(2^r-1)} - \frac{7r.r-1.r-2}{5760(2^r-3)} \\
& + \&c.
\end{aligned}$$

835. Lorsque r est négatif, soit $r = -s$; si s est > 1 , on aura, par ce qui a été démontré dans l'article 833. la somme de la progression $\frac{1}{m^s} + \frac{1}{(m+e)^s} + \frac{1}{(m+2e)^s} + \frac{1}{(m+3e)^s} + \&c.$ fera (en supposant $\frac{1}{n^s} = 0$) $= \frac{1}{(s-1)e m^{s-1}} + \frac{1}{2m^s} + \frac{se}{12m^{s+1}} - \frac{s.s+1.s+2.e^3}{720m^{s+3}} + \frac{s.s+1.s+2.s+3.s+4e^5}{30240m^{s+5}} e^5 - \&c.$ M. de Moivre a tiré cette suite de différens principes. De même, il suit, du dernier article, que $\frac{1}{(m+e)^s} + \frac{1}{(m+3e)^s} + \frac{1}{(m+5e)^s} + \frac{1}{(m+7e)^s} + \&c. = \frac{1}{(s-1)2em^{s-1}} - \frac{se}{12m^{s+1}} + \frac{7s.s+1.s+2.e^3}{720m^{s+3}} - \&c.$ Par exemple, si $s=2$, & $e=\frac{1}{2}$,

on aura $S = \frac{1}{m} - \frac{1}{12m^3} + \frac{7}{240m^5} - \frac{31}{1344m^7} + \&c.$ Pour calculer la somme de la progression $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \&c.$ il faut prendre la somme des termes, du commencement de la suite, aussi loin que $\frac{1}{(m+\frac{1}{2})^2}$ exclusivement, & ensuite calculer la somme des termes suivans, par ce Théorème. Ainsi, ajoutant seulement les trois premiers termes $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} = 1.36111$, &c. soit $m + \frac{1}{2} = 4$, ou $m = \frac{7}{2}$, & la somme des termes suivans fera $\frac{2}{7} \times (1 - \frac{1}{3 \times 49} + \frac{1}{15 \times 2401} - \&c.)$ de laquelle suite, en prenant seulement ces trois termes, & les ajoutant au premier nombre 1.36111, &c. on aura 1.64493, &c. pour la

suite de la somme requise, qui sera exacte jusqu'à la cinquième décimale. Si $s = \frac{1}{2}$, & $e = \frac{1}{2}$, on aura $S = \frac{1}{\sqrt{m}} \left(2 - \frac{1}{16mm} \right.$

$$\left. + \frac{49}{3072m^4} - \frac{31 \times 11}{32 \times 1024m^6} + \&c. \right)$$

836. Ces Théorèmes peuvent servir également, en plusieurs cas; pour calculer l'aire lorsque la suite, qui résulte de la Méthode commune, (décrite ci-devant, article 745. &c.) est trop peu convergente. Par exemple, soit Vmv l'hyperbole ordinaire, O le centre, $OR = m$, $Or = n$, & que Rr soit divisée en un nombre pair de parties égales, dont RA est la première, & ar la dernière; soit $RA = e$, & que S marque la somme des ordonnées AF , $BE \dots af$ qui appuient la distance $2e$ l'une

$$\text{de l'autre. On aura l'aire } RVvr = 2eS + \frac{2e^2}{12} \left(\frac{1}{mm} - \frac{1}{nn} \right) \\ - \frac{2 \times 2 \times 3 \times 7e^4}{720} \times \left(\frac{1}{m^4} - \frac{1}{n^4} \right) + \frac{2 \times 2 \times 7 \times 4 \times 5 \times 31e^6}{30240} \left(\frac{1}{m^6} - \frac{1}{n^6} \right)$$

$$- \&c. \text{ parce qu'en ce cas, } y = \frac{1}{x}, \dot{y} = -\frac{1}{x^2}, \ddot{y} = \frac{2}{x^3}, \\ \&c. \text{ Donc, si } OR = m = 1, Or = n = 2, \& RA = e = \frac{1}{8}, \\ \text{on aura } S = \frac{8}{9} + \frac{8}{11} + \frac{8}{13} + \frac{8}{15}, \& 2eS = \frac{2}{9} + \frac{2}{11} + \frac{2}{13} + \frac{2}{15}; \\ \frac{2e^2}{12} \cdot \left(\frac{1}{mm} - \frac{1}{nn} \right) = \frac{1}{512}; \frac{2 \times 2 \times 3 \times 7e^4}{720} \cdot \left(\frac{1}{m^4} - \frac{1}{n^4} \right) = \\ = \frac{7}{643}, \& \text{ par un nombre si petit de subdivisions de la base}$$

Rr , & des termes de la série, on trouve l'aire $RrvV$, ou le logarithme hyperbolique de 2, qui est 0.693146, &c. & qui ne diffère du vrai que de l'unité, dans la sixième décimale.

837. Le logarithme de m étant donné, celui de $m+z$ se détermine par ce Théorème, logarithme $(m+z)$ — logarithme $m = \frac{2z}{2m+z}$ multiplié par la suite $1 - \frac{z}{2} \cdot \left(\frac{1}{m+z} - \frac{1}{m} \right)$

$$+ \frac{z^3}{360} \cdot \left(\frac{1}{(m+z)^3} - \frac{1}{m^3} \right) - \frac{z^5}{1260} \cdot \left(\frac{1}{(m+z)^5} - \frac{1}{m^5} \right) + \&c.$$

Car, soit $EA = m$, $Aa = z$, FMf une courbe logarithmique Fig. ayant son asymptote Ez perpendiculaire à EA , $EP = x$, $PM = y$, le module, ou ordonnée $Ee = 1$; par la nature de la fi-

gure (article 178.) $\dot{y} = \frac{1}{x}$, ou $x\dot{y} = 1$; par conséquent, MN étant perpendiculaire à l'asymptote en N , l'aire $EeFMN = x - 1$, $eMP = EP \cdot PM = EeFMN = x \cdot \text{logarithme } x - x + 1$, & l'aire $AFfa = (m+z) \text{ logarithme } (m+z) - m$.

logarithme $m - z = A$. Et parce que $a = af - AF = \logarithme (m + z) - \logarithme m$ (supposant $z = 1$), $AF = a = \logarithme m =$ (article 829.) $\frac{A}{z} - \frac{a}{2} + \frac{z\beta}{12} - \frac{z^3\delta}{720} + \frac{z^5\zeta}{30240} - \&c. = \left(\frac{m}{z} + \frac{1}{2}\right) \logarithme (m + z) - \left(\frac{m}{z} - \frac{1}{2}\right) \logarithme m - 1 + \frac{z\beta}{12} - \frac{z^3\delta}{720} + \frac{z^5\zeta}{30240} - \&c.$

Donc $\left(\frac{m}{z} + \frac{1}{2}\right) (\logarithme (m + z) - \logarithme m) = 1 - \frac{z\beta}{12} + \frac{z^3\delta}{720} - \frac{z^5\zeta}{30240} + \&c. =$ (parce que $y = \frac{z}{x}$, $\&\beta = \frac{1}{m+z} - \frac{1}{m}$, $y = \frac{2x^3}{x^3}$, $\&\delta = \frac{2}{(m+z)^3} - \frac{2}{m^3}$, $\&c.$) $1 - \frac{z}{12} \left(\frac{1}{m+z} - \frac{1}{m}\right) + \frac{z^3}{360} \left(\frac{1}{(m+z)^3} - \frac{1}{m^3}\right) - \frac{z^5}{1260} \left(\frac{1}{(m+z)^5} - \frac{1}{m^5}\right)$. Donc, si l'on suppose $m = 1$, $\& z = 1$. puisque logarithme 1 = 0, il suit que $\frac{2}{3}$ logarithme 2 = $1 + \frac{1}{12 \times 2} - \frac{7}{360 \times 8} + \frac{31}{1260 \times 32} - \&c.$ Et supposant $z = \frac{1}{2}$, $\frac{2}{3} (\logarithme \frac{2}{3}) = 1 + \frac{1}{72} - \frac{19}{360 \times 8 \times 27} + \frac{311}{1260 \times 32 \times 343} - \&c.$ Par un calcul semblable, on verra que si z marque l'excès du logarithme de $a + d$ sur le logarithme de a , ou la mesure de la raison de $a + d$ à a , on trouvera la différence d des nombres, en divisant az par la suite $1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{12} - \frac{z^4}{720} + \frac{z^6}{30240} - \&c.$ On peut tirer de l'article 832. d'autres Théorèmes de cette espece.

838. Qu'il soit requis de trouver la somme des logarithmes d'une suite de nombres $m + e, m + 3e, m + 5e, m + 7e, \dots, n - e$, en progression arithmétique, où $m + e$ marque le moindre terme, $n - e$ le plus grand, $\& 2e$ la différence commune des termes, ou de trouver le logarithme du produit $m + e. m + 3e. m + 5e. m + 7e. \dots n - e$. tous ces nombres étant supposés multipliés continuellement l'un par l'autre. Pour cela, la figure étant la même, comme dans le dernier article, soit maintenant $EA = m + e$, $Ea = n - e$, prenez AR depuis A vers E égal à e , $\& ar$ du côté opposé $= AR$, $\&$ supposons toujours la Fluxion de la base $= 1$; nous aurons $ER = m$, $Er = n$,

l'aire $RVvr = n$. logarithme $n - m$. logarithme $(m) - n + m$
 $= A$, la différence des Fluxions des ordonnées rv , & RV est
 $\frac{1}{n} - \frac{1}{m} = \beta$, $\delta = \frac{2}{n^3} - \frac{2}{m^3}$ $\zeta = \frac{24}{n^5} - \frac{24}{m^5}$, $\theta = \frac{720}{n^7}$
 $-\frac{720}{m^7}$, &c. Donc (par l'article 832.) $S = \frac{A}{2e} - \frac{e\beta}{12}$
 $+ \frac{7e^3\delta}{720} - \frac{31\zeta}{30240} + \&c. = \frac{n \log. n - m \log. m}{2e} - \frac{(n - m)}{2e}$
 $- \frac{e}{12} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right) + \frac{7e^3}{360} \left(\frac{1}{n^3} - \frac{1}{m^3} \right) - \frac{31e^5}{1260} \left(\frac{1}{n^5} - \frac{1}{m^5} \right)$
 $+ \frac{127e^7}{1680} \left(\frac{1}{n^7} - \frac{1}{m^7} \right) - \&c.$ Et c'est la même solution que
 M. Stirling dérive de sa Méthode, *Prop. XXVIII. de interp.*
seriorum.

839. Les termes, en progression arithmétique, étant représen-
 tés par $m, m + e, m + 2e, m + 3e, m + 4e, \dots, n - e$,
 ou m marque le moindre terme, e la différence commune, &
 $n - e$ le plus grand terme; la somme des logarithmes, calculée
 par le Théorème pour S , dans l'article 830. est égale à l'excès
 de la suite $\left(\frac{n}{e} - \frac{1}{2} \right)$ logarithme $n - \frac{n}{e} + \frac{e}{12n} - \frac{e^3}{360n^3}$
 $+ \frac{e^5}{1260n^5} - \&c.$ par-dessus $\left(\frac{m}{e} - \frac{1}{2} \right)$ logarithme $m - \frac{m}{e}$
 $+ \frac{e}{12m} - \frac{e^3}{360m^3} + \frac{e^5}{1260m^5} - \&c.$ Car, si nous supposons
 maintenant $EA = m$, & $Ea = n$, AF sera la première ordon-
 née, l'aire $AFfa = n$. logarithme $n - m$. logarithme m , $a = af$
 $- AF = \text{logarithme } n - \text{logarithme } m$, la différence des Flu-
 xions de af & AF , ou $\beta = \frac{1}{n} - \frac{1}{m}$, $\delta = \frac{2}{n^3} - \frac{2}{m^3}$, &c.
 & l'on aura le Théorème, en substituant les valeurs de $A, \beta,$
 δ , &c. dans l'équation pour S , de l'article 830. Cela s'accorde
 avec la valeur de S , trouvée par M. Moivre, d'une manière
 différente, *Suppl. ad Miscell. Analyt.*

840. La somme des logarithmes des nombres impairs 3, 5,
 7, 9, 11, $\dots, n - 1$ se trouve promptement, lorsque n est un
 grand nombre, en calculant $\frac{n}{2}$ logarithme $n - \frac{n}{2} - \frac{1}{12n}$
 $+ \frac{7}{360n^3} - \frac{31}{1260n^5} + \frac{127}{1680n^7} - \&c.$ & ensuite ajoutant
 $\frac{\log. 2}{2}$, ou le logarithme constant. 346573590, &c. Parce
 que si l'on suppose dans l'article 838. $e = 1$, & $m = 2$, on aura

$\frac{m \log. m}{2} - \frac{m}{2} - \frac{1}{12 m} + \frac{7}{360 m^3} - \frac{31}{1260 m^5} + \&c. = \logarithme 2 - 1 - \frac{1}{12 \times 2} - \frac{7}{360 \times 8} - \frac{31}{1260 \times 32} + \&c. =$ (par l'article 837.) $\logarithme 2 - \frac{1}{2} \logarithme = - \frac{1}{2} \logarithme 2$, & cette quantité doit être soustraite de $\frac{n}{2} \logarithme n - \frac{n}{2} - \frac{1}{12 n} + \&c.$ pour avoir la somme des logarithmes de 3, 5, 7, ... $n - 1$, par l'article 838.

841. La somme d'une suite, dont les sommes sont alternativement positifs & négatifs, se trouve, en calculant séparément les sommes de ceux qui sont affectés des mêmes signes, par l'un des Théorèmes des articles 830, ou 832. & prenant ensuite la différence de ces sommes. Mais lorsque les termes, qui doivent être ajoutés & soustraits alternativement, peuvent être considérés comme les ordonnées successives de la même figure, on peut éviter le calcul de l'aire, & trouver plus élégamment la somme de la suite, par le Théorème suivant. Que A F représente le premier terme positif, *af* celui qui vient après le dernier terme négatif, lorsque la progression est continuée, *e* la distance commune des ordonnées, S la somme des termes qui précèdent *af*, & que $\beta, \delta, \zeta, \&c.$ marquent les différences par où les Fluxions alternatives de *af* surpassent les Fluxions respectives de A F, comme ci-devant. On aura $S = \frac{A F - af}{2} + \frac{e \beta}{4} - \frac{e^3 \delta}{48}$

$\frac{e^5 \zeta}{480} - \&c.$ Car, la somme des termes positifs (par l'art. 830.

lorsque la commune distance des ordonnées, qui les représentent,

est $2e$ est $\frac{A}{2e} - \frac{a}{2} + \frac{2e\beta}{12} - \frac{8e^3\delta}{720} + \&c.$ & la somme

des termes négatifs (art. 832.) est $\frac{A}{2e} - \frac{e\beta}{12} + \frac{7e^3\delta}{720}$

$- \&c.$ dont la différence (a étant $= af - A F$) est $\frac{A F - af}{2}$

$+ \frac{e\beta}{4} - \frac{e^3\delta}{48} + \&c.$ Si la première, troisième & plus hau-

tes Fluxions alternatives de *af* disparaissent, & que $\beta, \delta, \zeta, \&c.$ représentent la première, troisième & plus hautes Fluxions alternatives de A F, sans changer leurs signes, on aura

$$S = \frac{AF - af}{2} - \frac{e\beta}{4} + \frac{e^3\delta}{48} - \frac{e^5\zeta}{480} + \frac{17e^7\theta}{80640} - \&c.$$

842. Donc, si $EA = 2$, $AF = \text{logarithme } 2$, $Ea = n$, $af = \text{logarithme}$, & si $\beta, \delta, \zeta, \&c.$ marquent les différentes Fluxions de AF , le logarithme de la dernière valeur du produit $\frac{2}{3}$.

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{10}{11} \cdot \dots \cdot \frac{n-1}{n-2} \cdot 2\sqrt{n} \text{ fera égal à } \frac{\log. 2. - \log. n}{2} - \frac{\beta}{4}$$

$$+ \frac{\delta}{48} - \frac{\zeta}{480} + \&c. = (\text{parce que par l'article 827. } \frac{3}{2} \text{ lo-}$$

$$\text{garithme } 2 = 1 + \frac{\beta}{12} - \frac{7\delta}{720} + \frac{31\zeta}{30240} - \&c.) 1 - \frac{3\beta}{12}$$

$$+ \frac{8\delta}{720} - \frac{32\zeta}{30240} + \&c. = (\text{parce que } \beta = \frac{1}{2}, \delta = \frac{2}{3}, \zeta$$

$= \frac{2}{3^2}, \&c.) 1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{360} - \frac{1}{1260} + \frac{1}{1680} - \&c.$ Mais (parce que le Docteur Wallis a démontré) si c marque la circonférence, dont le rayon est 1, $c = 8 \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{24}{25} \cdot \frac{48}{49} \cdot \frac{80}{81} \cdot \&c.$ lequel produit, continué jusques à ce que le dénominateur de la dernière fraction soit $(n-1)^2$, peut s'exprimer par $4 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{16}{25} \cdot \frac{36}{49} \cdot \frac{64}{81} \cdot \dots \times \frac{(n-2)^2}{(n-1)^2} \cdot n$; par conséquent $\sqrt{c}$ est la dernière valeur de

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \dots \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot 2\sqrt{n}, \& \text{ logarithme } \sqrt{c} = \frac{\log. c}{2} = 1$$

$- \frac{1}{12} + \frac{1}{360} - \frac{1}{1260} + \frac{1}{1680} - \&c.$ Cela sert (comme M. Stirling a été le premier à le remarquer) pour abrégier le calcul, en trouvant la somme des logarithmes des nombres 1, 2, 3, 4, 5, ... $n-1$. Car, supposant, dans l'article 839. $m = e = 1$, la dernière de cet article, $(\frac{m}{n} - \frac{1}{2}) \text{ logarithme } m - \frac{m}{e}$

$$+ \frac{e}{12m} + \frac{e^3}{360m^3} + \&c. = -1 + \frac{1}{12} - \frac{1}{360} + \frac{1}{1260} - \&c.$$

$$= -1 \frac{\log. c}{2}; \text{ par conséquent } S = (n - \frac{1}{2}) \text{ logarithme } n - n$$

$$+ \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \frac{1}{1260n^5} - \&c. + \frac{\log. c}{2}, \text{ ou si } n - \frac{1}{2} \text{ mar-}$$

que le plus grand nombre de la progression, alors (substituant $\frac{1}{2}$ pour e dans l'article 838.) $S = n \cdot \text{logarithme } n - n - \frac{1}{24n}$

$$+ \frac{7}{2880n^3} - \frac{31}{46320n^5} + \&c. + \frac{\log. c}{2} \text{ Ce sont les regles}$$

données, pour ces cas, dans les Traités ci-devant cités. Mais s'il faut trouver la valeur de $8 \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{24}{25} \cdot \frac{48}{49} \cdot \&c.$ par le Théorème de l'article 841. (c'est-à-dire, calculer c de la proposition de

Wallis); puisque la suite, pour le logarithme de $\sqrt{c}$, est trop peu convergente, lorsque EA est supposé = 2, soit r un plus grand nombre pair; trouvez le nombre, dont le logarithme est $\frac{1}{4r} - \frac{1}{24r^3} + \frac{1}{20r^5} - \&c.$ nommez ce nombre N & $\sqrt{c}$ = $2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \dots \cdot \frac{r-2}{r-1} \cdot \frac{\sqrt{r}}{N}$. Si $r = 10$, soit N un nombre, dont le logarithme est égal à $\frac{1}{40} - \frac{1}{24000} + \frac{1}{2000000} - \&c.$ & $\sqrt{c} = \frac{256}{315} \cdot \frac{\sqrt{10}}{N}$.

843. On peut trouver, de même, le logarithme de la dernière valeur des autres produits de cette espèce, comme de $3 \cdot \frac{21}{25} \cdot \frac{27}{81} \cdot \frac{165}{179} \cdot \frac{285}{289} \cdot \&c.$ où les dénominateurs sont les quarrés des nombres impairs 5, 9, 13, 17, 21, &c. dont la commune différence est 4, & chaque numérateur est moindre que son dénominateur de 4. Soit nommée p la dernière valeur de ce produit, $\sqrt{p}$ fera la dernière valeur de $\frac{3}{5} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{11}{13} \cdot \frac{15}{17} \cdot \dots \cdot \frac{n-4}{n-2} \sqrt{n}$. Soit r un nombre dans la progression 3, 7, 11, 15, 21, 25, &c. & N le nombre, dont le logarithme est = $\frac{1}{2r} - \frac{1}{3r^3} + \frac{8}{5r^5} - \&c.$ on aura $\sqrt{p} = \frac{\sqrt{r}}{N} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{11}{13} \cdot \frac{15}{17} \cdot \dots \cdot \frac{r-4}{r-2}$.

844. Le Problème concernant la raison de la somme de tous les coefficients de la puissance d'un binome au coefficient du terme moyen, peut se résoudre par l'article 838. ou 839. avec l'article 842. ou plutôt par le Théorème suivant. Soit r l'exposant de la puissance à laquelle on doit élever le binome, lorsque l'exposant est un nombre pair, ou égal à cet exposant diminué de l'unité, lorsque c'est un nombre impair; & que c marque la circonférence du cercle, dont le rayon est 1; que N marque le nombre, dont le logarithme est = $\frac{1}{4(r+1)} - \frac{1}{24(r+1)^3} + \frac{1}{20(r+1)^5} - \&c.$ la raison requise sera celle de $\frac{\sqrt{c(n+1)}}{2N}$ à l'unité. Car cette raison est = $1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \dots \cdot \frac{r-1}{r-2} \cdot r$, qui (par l'article 842.) est égale à la dernière valeur de $\frac{\sqrt{c}}{2} \cdot \frac{r+1}{r+2} \cdot \frac{r+3}{r+4} \cdot \frac{r+5}{r+6} \cdot \dots \cdot \sqrt{r+s}$ où s est supposé un nombre qui

qui croît continuellement par l'incrément 2 ; & le logarithme de cette dernière valeur est (par l'article 841. supposant A F

$$= \text{logarithme } (r+1), \& af = \text{logarithme } (r+s) = \frac{\log. \sqrt{c}}{2} \\ - \frac{\log. (r+s)}{2} + \frac{\log. (r+1)}{2} - \frac{1}{4(r+1)} + \frac{1}{24(r+1)^3} \\ - \frac{1}{20(r+1)^5} + \&c. + \frac{\log. (r+s)}{2} = \text{logarithme } \frac{\sqrt{c}(r+1)}{2} \\ - \frac{1}{4(r+1)} + \frac{1}{24(r+1)^3} - \frac{1}{20(r+1)^5} + \&c. = \text{logarithme} \\ \frac{\sqrt{c}(r+1)}{2N}. \text{ Ces logarithmes sont toujours supposés hyperbo-}$$

liques, mais on les change en ceux des tables, en les multipliant par 0. 4342944819, &c. On peut trouver la solution de ce Problème par d'autres principes, par *Suppl. Miscell. Analyt.* p. 17 de M. de Moivre, & dans *Traët. de Summat. serier.* p. 119 de M. Stirling. Comme on trouve les autres coefficients des termes d'un binome (lorsque l'exposant r est un nombre pair) en multipliant celui du terme moyen par $\frac{r}{r+2} \cdot \frac{r-2}{r+4} \cdot \frac{r-4}{r+6} \cdot$ &c. on peut aussi les trouver, de même, par l'article 838. &c. quant à l'usage des propriétés d'un binome, élevé à une haute puissance, lisez *Ars Comject.* Part. IV. Chap. IV. de M. Jacques Bernoulli, & *Doctr. of chances* de M. de Moivre.

845. La somme de la suite $\frac{1}{m^r} - \frac{1}{(m+e)^r} + \frac{1}{(m+2e)^r} - \frac{1}{(m+3e)^r} + \frac{1}{(m+5e)^r} - \&c.$ est (par l'article 841. parce que af , avec toutes les Fluxions, s'évanouit à la fin, en ce cas) $\frac{1}{2m^r} + \frac{reA}{2m} - \frac{r+1.r+2.}{12mm} \times eeB + \frac{r+3.r+4.}{10mm} .eeC$ $- \frac{17.r+5.r+6}{168mm} eeD + \&c.$ ou A marque à la maniere ordinaire le premier terme $\frac{1}{2m^r}$, B le second, C le troisième ;

sans égard aux signes, &c. Si $r=1$, $S = \frac{1}{2m} + \frac{1}{4mm} - \frac{1}{8m^2} + \frac{1}{4m^3} - \frac{17}{8m^4} + \&c.$ Et par là on peut aisément calculer pour un grand nombre de places décimales la suite $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \&c.$ (qui est le logarithme hyperbolique de 2)

en additionnant d'abord les termes du commencement de la suite, qui précèdent $\frac{1}{m}$, sçavoir $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \dots - \frac{1}{m-2}$, par l'arithmétique commune, & ensuite ajoutant $\frac{1}{2m} + \frac{1}{2m^2} - \frac{1}{m^4} + \frac{8}{m^6} - \frac{34}{m^8} + \&c.$ Cette suite est égale à $\frac{1}{3}$ de la circonférence du cercle, dont le rayon est 1, par l'article 746. & par là on peut calculer, sans beaucoup de peine, la raison de la circonférence au diamètre, jusques à un grand nombre de places décimales.

846. Les Théorèmes des articles 830 & 832. peuvent s'appliquer pour l'approximation de la somme d'une suite formée par la substitution successive des nombres, en progression arithmétique, à la place de x dans la fraction $\frac{1}{x+a. x+b. x+c. \&c.}$ (ou $a, b, c, \&c.$ représentent des nombres donnés quelconques) en se servant de ce qu'on a démontré, dans le dernier Chapitre, touchant l'aire, où l'ordonnée est égale à une fraction, &c. & en quelques cas, cette somme peut se déterminer exactement, par l'article 361.

847. Si N représente le nombre dont le logarithme hyperbolique est e , la somme de la suite $1 + \frac{e}{2} + \frac{e^2}{12} - \frac{e^4}{720} + \frac{e^6}{30240} - \frac{e^8}{1107600} + \&c. = \frac{e^N}{N-1}$: & la somme de la suite $\frac{1}{2} - \frac{e^2}{12} + \frac{7e^4}{720} - \frac{31e^6}{30240} + \frac{127e^8}{1209600} - \&c. = \frac{e^N}{NN-1}$. Cela se démontre, en supposant, dans les articles 830 & 832. que la courbe $F M f$ est logarithmique, $A a$ son asymptote, AF ou RV égal au *module*, cherchant la somme des ordonnées, par la règle ordinaire, pour une progression Géométrique, & faisant cette somme égale à la valeur de S , dans ces articles.

848. La base $A a$ étant divisée en un nombre de parties égales, représentées par n , soit l'aire $AFfa = Q$, la somme des ordonnées extrêmes $AF + af = A$, la somme de toutes les ordonnées moyennes $BE + CK + \&c. = B$, la base $Aa = R$, & que $\beta, \delta, \zeta, \&c.$ représentent les mêmes quantités que ci-

devant ; l'aire $AFfa = Q = \left(\frac{A}{2n+2} + \frac{nB}{nn-1} \right) R -$
 $-\frac{R^4\delta}{720nn} + \frac{R^6\zeta}{30240} \cdot \frac{nn+1}{n^4} - \&c.$ Car, supposant, dans
 l'art. 830. $z = \frac{R}{n}$, $S + \frac{af - AF}{2} = B + \frac{A}{2} = \frac{nQ}{R} + \frac{R\beta}{12n}$
 $-\frac{R^3\delta}{720n^3} + \frac{R^5\zeta}{30240n^5} - \&c.$ & supposant $z = R$, dans le
 même Théorème, $\frac{AF + af}{2} = \frac{A}{2} = \frac{Q}{R} + \frac{R\beta}{12} - \frac{R^3\delta}{720}$
 $+ \frac{R^5\zeta}{30240} - \&c.$ si nous chassons β , par ces deux équations,
 la proposition sera évidente. Si l'on néglige δ , ζ , θ , &c.
 $AFfa = \frac{AR}{2n+2} + \frac{nBR}{nn-1}$. Supposant $n=2$, ou qu'il y a
 seulement trois ordonnées (auquel cas, B marque celle du mi-
 lieu) l'aire $AFfa = \frac{A+4B}{6} R - \frac{R^4\delta}{4(720)} + \frac{5R^6\zeta}{16(30240)}$
 $- \&c.$ Si l'on suppose $n=3$, ou qu'il n'y a que quatre or-
 données, B représentera la somme de la seconde & de la troi-
 sième, & l'aire $AFfa = \frac{A+3B}{8} R - \frac{R^4\delta}{9(720)} + \frac{R^6\zeta}{81(30240)}$
 $- \&c.$ En négligeant δ , ζ , θ , &c. on aura deux des Théo-
 rèmes donnés par Newton, & par d'autres, pour calculer l'aire,
 par les ordonnées équidistantes, dont le dernier ($AFfa =$
 $= \frac{A+3B}{8} R$) est fort recommandé par M. Cotes.

849. En chassant δ , ζ , θ , &c. successivement, on trouvera
 d'autres Théorèmes, par lesquels on déterminera toujours plus
 exactement l'aire, par les ordonnées. Qu'il y ait cinq ordon-
 nées, A la somme de la première, & de la dernière, B celle
 de la seconde, & de la quatrième, & C l'ordonnée du milieu ;
 l'aire $AFfa = \frac{7A + 22B + 12C}{90} R - \frac{31R^6\zeta}{6(16) \times 16 \times 30240}$
 $+ \&c.$ Car, par la règle pour les trois ordonnées, $\frac{Q}{R} =$
 $= \frac{A+4C}{6} - \frac{R^3\delta}{4(720)} + \frac{5R^5\zeta}{16(30240)}$. En divisant la ba-
 se en deux parties égales, & calculant, par la même règle, l'aire
K k ij

qui se trouve de chaque côté, & ajoûtant ensemble ces aires ;

$$\frac{2Q}{R} + \frac{A + 4B + 2C}{6} - \frac{R^3 \delta}{32(720)} + \frac{5R^5 \zeta}{2 \times 16 \times 16(30240)}$$

— &c. & en chassant δ , par ces deux équations, on aura la proposition. On peut continuer ces Théorèmes, de la même manière, & juger de l'exactitude des différentes regles, en comparant les quantités qu'on y a négligées.

Fig. 317.

850. Les Théorèmes de l'article 830 & 832. d'où nous avons tiré tant de conclusions, peuvent servir à interpoler, de même, les termes d'une suite, ou à trouver les ordonnées intermédiaires d'une figure, lorsque les principales ordonnées équidistantes sont données. Si l'équation de la figure FMf est connue, les ordonnées intermédiaires se trouvent sans aucune difficulté, en substituant les valeurs intermédiaires de la base dans l'équation; mais il n'est pas si facile d'interpoler les valeurs de S , ou des sommes de ces ordonnées. Supposons que FNz soit la figure, dont les ordonnées successives aux points A, B, C, D , &c. sont toujours égales aux sommes successives des ordonnées de la figure FMf aux mêmes points commençant avec AF ; c'est-à-dire, soit $AF = AF$, $B_e = AF + BE$, $C_z = B_e + CK$, $D_\lambda = C_z + DL$, &c. & qu'il soit question de déterminer quelque ordonnée intermédiaire PN de la figure FNz . Que cette ordonnée PN rencontre la courbe FMf en M , $AF = a$, $PM = y$, la distance commune des ordonnées, $AB = e$, l'aire $AFMP = Q$, $y - a = \beta$, $y - a = \delta$, &c. on aura PN

$$= \frac{Q}{e} + \frac{a+y}{2} + \frac{e\beta}{12} - \frac{e^3\delta}{720} + \frac{e^5\zeta}{30240} - \frac{e^7\theta}{1209600}$$

+ &c. parce que si nous supposons que PN prend successivement les places des ordonnées de la figure FNz en A, B, C, D , &c. ses valeurs successives seront bien déterminées par ce Théorème, selon l'article 830. Ou si nous voulons éviter l'aire Q dans le Théorème, pour avoir PN , soit $AP = m$, &

$$\text{puisque } \frac{a+y}{2} = \frac{Q}{m} + \frac{m\beta}{12} - \frac{m^3\delta}{720} + \frac{m^5\zeta}{30240} - \text{\&c.}$$

$$\text{il suit que } PN = \frac{a+y}{2} \times \frac{e+m}{e} + \frac{e^2 - m^2}{12e} \beta - \frac{e^4 - m^4}{720e}$$

$$+ \frac{e^6 - m^6}{30240e} \zeta - \text{\&c. Il suit, de l'article 832. un Théorème}$$

semblable ; prenons AR en-deçà de A, & Pr au-delà de P, chacune égale à $\frac{1}{2} AB$; que RV & rv rencontrent FMf, & V & v ; que Q exprime maintenant l'aire RVvr, & β, δ, ζ , &c. les différences, par où la première, troisième, cinquième & autres Fluxions alternatives de l'ordonnée rv, surpassent les Fluxions respectives de RV, & soit $AB = e$, comme auparavant, chaque ordonnée PN, sera $= \frac{Q}{e} - \frac{e\beta}{2 \times 12} + \frac{7e^3\delta}{8 \times 720}$

$- \frac{31e^5\zeta}{32 \times 30240} + \&c.$ Les ordonnées aux points A, B, C, D,

&c. se nommeront principales ordonnées des figures FNz, ou FMf. Si Pp = AB, pn rencontrera FNz en n, & FMf en m ; alors $pn = PN + pm$, ou $PN - pm$, selon que Pp est prise en-delà, ou en-deçà de P : & ainsi une ordonnée intermédiaire PN étant connue, on trouvera aisément toutes les autres ordonnées de la figure FNz, qui en sont à une distance égale à AB, ou à un multiple de AB, en ajoutant, ou en retranchant les ordonnées intermédiaires de la figure FMf.

851. Que TX & T'X' soient les ordonnées principales de la figure FMf à côté de l'ordonnée intermédiaire PN ; divisez également TT' en x ; que l'ordonnée xy rencontre FMf en y ; soient l'aire xyvr = q, l'ordonnée en T de la figure FNz, ou Tτ = f, xy = y, rv = u, on aura $PN = f + \frac{q}{e}$

$- \frac{e}{2 \times 12} (\dot{u} - \dot{y}) + \frac{7e^3}{8 \times 720} (\ddot{u} - \ddot{y}) - \&c.$ Car, si RV = a, l'aire RVvr = Q, on aura RVyx = Q - q, & $PN = \frac{Q}{e} - \frac{e}{2 \times 12} (\dot{u} - \dot{a}) + \frac{7e^3}{8 \times 720} (\ddot{u} - \ddot{a}) - \&c.$

par le dernier article ; & $T\tau = f = \frac{Q - q}{e} - \frac{e}{2 \times 12} (\dot{y} - \dot{a}) + \frac{7e^3}{8 \times 720} (\ddot{y} - \ddot{a}) - \&c.$ par l'article 830. par conséquent

$PN - f = \frac{q}{e} - \frac{e}{24} (\dot{u} - \dot{y}) + \frac{7e^3}{8 \times 720} (\ddot{u} - \ddot{y}) - \&c.$

Cette suite est fort convergente, en plusieurs cas, ou PN est à une grande distance de AF.

852. Cela nous conduit à quelques Théorèmes simples & aisés, pour trouver les termes intermédiaires d'une suite, par l'interpolation des différences des termes. 1°. Supposons que

ces différences décroissent continuellement, de sorte, qu'en continuant la suite, elles puissent devenir plus petites qu'aucune quantité donnée, sans jamais évanouir; ou que les termes de la suite étant représentés par les ordonnées de la figure FNz , & leurs différences, par les ordonnées de FMf , cette dernière figure ait la base Ff pour asymptote. En ce cas, πv terme de la suite, qui précède le premier terme principal AF , à une distance $A\pi$ moindre que AB , est égal à l'excès de la somme des principales différences $AF + BE + CK + \&c.$ sur la somme des différences interpolées, $be + ck + dl + \&c.$ les distances $Bb, Cc, Dd, \&c.$ étant chacune égale à $A\pi$, & prises du même côté de $B, C, D, \&c.$ Car, en ce cas, PN est à la fin égal à $T\tau$; c'est-à-dire, que (supposant $PT' = \pi A$) $\pi v + be + ck + dl + \&c.$ est à la fin égal à $AF + BE + CK + \&c.$ par conséquent $\pi v = AF - be + BE - ck + CK - dl + \&c.$

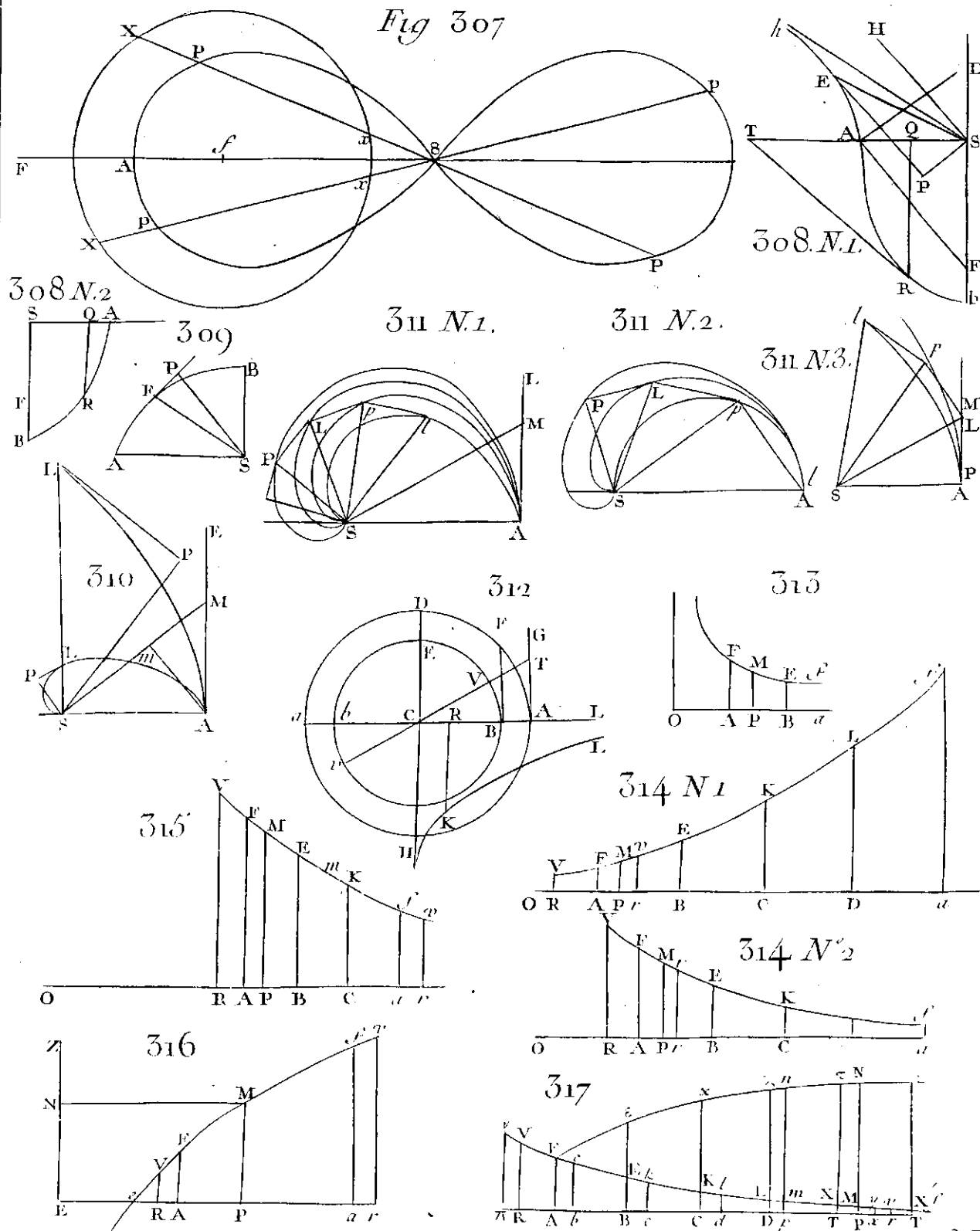
853. Par exemple, supposant $AF = 1, BE = \frac{1}{2}, CK = \frac{1}{3}, DL = \frac{1}{4}, \&c.$ les ordonnées principales de la figure FNz seront $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \&c.$ Soit $A\pi = \frac{1}{2} AB$; puisque les différences intermédiaires sont $be = \frac{2}{3}, ck = \frac{2}{5}, dl = \frac{2}{7}, \&c.$ il suit, que $\pi v = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{2}{5} + \frac{1}{3} - \frac{2}{7} + \frac{1}{4} - \frac{2}{9} + \&c. = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \&c. \right) =$ (parce que logarithme $2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \&c.$) $2 \left(1 - \text{logarithme } 2 \right)$. Et les autres termes intermédiaires se trouveront, en ajoutant successivement les différences intermédiaires $\frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \&c.$ *

854. De même, si nous supposons $AF = 1, BE = \frac{1}{4}, CK = \frac{1}{9}, DL = \frac{1}{16}, \&c.$ ou que les principales ordonnées successives de FMf sont les carrés de $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \&c.$ & si nous supposons $A\pi = \frac{1}{2} AB$, les différences intermédiaires $be, ck, dl, \&c.$ seront $\frac{4}{9}, \frac{4}{25}, \frac{4}{49}, \&c.$ les ordonnées $AF, Be, Ck, Dl, \&c.$ seront $1, 1 + \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}, 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}, \&c.$ & l'ordonnée πv , qui est avant la première ordonnée principale

* Le Scavant M. Euler, dans les *Commentaires de Pétersbourg*, Tom. V. p. 91, a déterminé les termes intermédiaires de cette suite, en trouvant une fluente qui exprime les termes de la suite, d'une manière générale, laquelle fluente, dans ce cas, est $F, \frac{1-x^n}{1-x} x^n$, n marquant la place du

terme dans la série, (c'est-à-dire, 1 pour le premier terme, 2 pour le second, &c. & $\frac{1}{2}$ pour le terme πv) & substituant 1 pour x , après que la fluente a été déterminée. Ainsi

$\pi v = F, \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} x = 2 - 2 \text{ logarithme } 2.$



le, à la demi-commune distance des ordonnées, sera égale à $1 - \frac{4}{9} + \frac{1}{4} - \frac{4}{25} + \frac{1}{9} - \frac{4}{49} + \&c. = 4 (\frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} - \frac{1}{25} + \&c.)$ Donc, si la somme de la suite $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \frac{1}{36} + \&c.$ (qui peut se calculer aisément, par l'article 845.) est désignée par N , on aura $\pi v = 4 - 4N$. Si $AF = 1$, $BE = \frac{1}{5}$, $CK = \frac{1}{9}$, $DL = \frac{1}{13}$, $\&c.$ & $A\pi = \frac{1}{2}AB$, on aura $\pi v = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \&c.$ qui est égale à la huitième partie de la circonférence, dont le rayon est l'unité.

855. Lorsque les termes peuvent être continués sans fin, & que leurs secondes différences décroissent, enforte qu'enfin elles disparaissent; soit K la dernière valeur des premières différences des termes; πv sera égal à $\frac{BA - B\pi}{AB} K$, ajouté à l'excès de la somme des principales différences $AF + BE + CK$, par-dessus la somme des différences intermédiaires, $be + ck + dl + \&c.$ parce qu'en ce cas, les Fluxions de rv & xy disparaissent à la fin. PN est à la fin égal à $f + \frac{g}{e}$, q à $K \times xr = K (AB - A\pi)$, & par conséquent $\pi v = \frac{AB - A\pi}{AB} K + AF - be + BE - ck + \&c.$ On peut appliquer un Théorème semblable au cas, où les secondes différences des termes approchent continuellement d'une certaine limite.

856. La suite 1, 1. 1, 1. 2, 1. 2. 3, 1. 2. 3. 4, 1. 2. 3. 4. 5, &c. étant proposée, on demande le terme qui est entre les deux premiers termes principaux, à égales distances de chacun. Les différences des logarithmes des termes, sont logarithme 1, logarithme 2, logarithme 3, logarithme 4, logarithme 5, &c. & les ordonnées de la figure $F M f$ étant supposées représenter ces logarithmes, les ordonnées intermédiaires seront logarithme $\frac{1}{2}$, logarithme $\frac{2}{2}$, logarithme $\frac{3}{2}$, logarithme $\frac{4}{2}$, &c. Donc le logarithme du terme requis est $\frac{K}{2} + \text{logarithme } 1 - \text{logarithme } \frac{1}{2} + \text{logarithme } 2 - \text{logarithme } \frac{2}{2} + \text{logarithme } 3 - \text{logarithme } \frac{3}{2} + \&c.$ qui est égal au logarithme de la dernière valeur de $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \dots \cdot \frac{n}{n-1} \sqrt{n+1} =$ (par ce qui a été démontré dans l'article 842. d'après le Docteur Wallis,)

logarithme $\frac{\sqrt{c}}{2}$; par conséquent le terme requis est égal à la moitié de la racine quarrée de la circonférence, dont le rayon est 1; ce qui s'accorde avec ce qu'on a trouvé, par d'autres Méthodes. On peut pousser ce sujet plus loin, & donner d'autres exemples de l'usage de la Méthode des Fluxions, pour trouver la somme d'une suite, ou pour interpoler ses termes; mais nous allons donner ce qui est plus nécessaire pour conduire ce Traité à sa conclusion.

CHAPITRE V.

Des Regles générales pour la résolution des Problèmes

Fig. 319.
N. 1.

857. **I**L nous reste à donner brièvement les regles générales, dérivées de cette Méthode, pour la résolution des Problèmes, & à les éclaircir par des exemples. La base AP étant représentée par x , & l'ordonnée PM par y , la *soutangente* PT (qui est une droite sur la base, comprise entre l'ordonnée & la tangente) se trouve, en calculant $\frac{y \dot{x}}{\dot{y}}$. Lorsque y croît, pen-

dant que x croît, cette valeur de PT est positive, & PT est du même côté de P, que PA; mais lorsque y décroît, pendant que x croît, cette valeur de PT est négative, & PT est de l'autre côté de P. Si $\dot{x}$ disparoît, par rapport à $\dot{y}$, PT disparoît; & l'ordonnée est tangente; mais si $\dot{y}$ disparoît, par rapport à $\dot{x}$, la tangente est parallele à la base. Si la courbe FM est re-

présentée par z , la tangente MT fera $= \frac{y \dot{z}}{\dot{y}} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\dot{y}}$.

Si MN, perpendiculaire à la tangente MT, rencontre la base en N, PN (que l'on nomme quelquefois subnormale) est

$= \frac{y \dot{y}}{\dot{x}}$. Tout cela suit des articles 188. &c. par lesquels $\dot{x}$, $\dot{y}$,

$\dot{y}$, & $\dot{z}$ sont prouvés en même proportion que les droites PT, PM & MT, ou comme PM, PN & MN. Par exemple, si

$$y^m = a^m - x, \text{ on aura (article 728.) } \frac{m \dot{y}}{y} = \frac{\dot{x}}{x}, \& \text{PT} = \frac{x \dot{y}}{y}$$

$= m x = m. \text{ AP.}$ Que le rayon SE, roulant autour du centre Fig. 320. donné S, rencontre la courbe AEB en E, & décrive l'arc fE du centre S, SE = r l'arc de la courbe AE = s, soit la Fluxion de l'arc circulaire fE représentée par $\dot{z}$, & soit SP perpendiculaire du point S sur la tangente EP en P, on aura SP

$$= \frac{r \dot{z}}{s}, \& \text{EP} = \frac{r \dot{r}}{s}, \text{ par l'article 202. Il y a d'autres Théorèmes relatifs aux tangentes, qui sont en usage dans des recherches particulières. On en a donné quelques-uns dans le Chap. VIII. du Liv. premier.}$$

858. Lorsque la première Fluxion de l'ordonnée disparoît, si, dans le même tems, la seconde Fluxion est positive, l'ordonnée est alors un *minimum*, mais c'est un *maximum*, si la seconde Fluxion est alors négative; c'est-à-dire, qu'elle est moindre dans le premier cas, & plus grande dans le second, que les ordonnées voisines, de part & d'autre, dans cette branche de la courbe. Cela suit, de ce qu'on a démontré, fort au long, dans le Chap. IX. du Liv. premier, où l'on peut le démontrer ainsi. Soit l'ordonnée AF = E, AP = x; la base étant supposée fluere unifor-

mément, l'ordonnée PM fera = (article 751.) E + $\frac{\dot{E} x}{x}$ Fig. 319.
+ $\frac{\ddot{E} x^2}{2 x^2}$ + $\frac{\ddot{\ddot{E}} x^3}{6 x^3}$ + &c. Prenons Ap de l'autre côté de A égal à AP, l'ordonnée pm fera = E - $\frac{\dot{E} x}{x}$ + $\frac{\ddot{E} x^2}{6 x^2}$ - $\frac{\ddot{\ddot{E}} x^3}{6 x^3}$ + &c. Supposons maintenant $\dot{E} = 0$, on aura PM

$$= E + \frac{\ddot{E} x^2}{2 x^2} + \&c. \& pm = E - \frac{\ddot{E} x^2}{2 x^2} - \&c. \text{ Donc,}$$

si les distances AP & Ap sont assez petites, PM & pm surpasseront toutes les deux l'ordonnée AF, lorsque $\ddot{E}$ est positive;

mais elles seront toutes deux moindres que AF , si $\ddot{E}$ est négative. Mais si $\ddot{E}$ disparoît aussi-bien que $\dot{E}$, & que $\dot{E}$ ne disparoisse pas, l'une des ordonnées voisines PM , ou pm sera plus grande que AF , & l'autre sera moindre; enforte que dans ce cas, il n'y aura ni *maximum*, ni *minimum*. Nous supposons toujours que l'expression de l'ordonnée est positive.

859. En général, si la premiere Fluxion de l'ordonnée, avec ses Fluxions de différens ordres subléquens, disparoissent, l'ordonnée est un *minimum*, ou un *maximum*, lorsque le nombre de toutes ces Fluxions, qui disparoissent, est 1, 3, 5, ou un autre nombre impair. L'ordonnée est un *minimum*, lorsque la Fluxion, qui suit celles qui disparoissent, est positive; mais c'est un *maximum*, si cette Fluxion est négative. Cela suit, de l'article 261. ou de la comparaison des valeurs de PM & pm , dans le dernier article. Mais si le nombre de toutes les Fluxions de l'ordonnée du premier & des autres ordres subléquens, qui disparoissent, est un nombre pair, l'ordonnée n'est ni un *maximum*, ni un *minimum*.

860. Lorsque la Fluxion de l'ordonnée y est supposée égale à zéro, & que de là, on tire une équation qui détermine x , si les racines, de cette équation, sont toutes inégales, chacune donne une valeur de x , qui peut répondre à une plus grande, ou moindre ordonnée. Mais si deux, ou un nombre pair, de ces racines, sont égales, l'ordonnée, qui leur répond, n'est ni un *maximum*, ni un *minimum*. S'il y a un nombre pair de racines égales, il y a un *maximum*, ou un *minimum* qui répond à ces racines; mais

un seul. Ainsi faisant $\frac{\dot{y}}{x} = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$, & sup-

posant que toutes les racines de l'équation $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ sont réelles, si les quatre racines sont égales, il n'y a point d'ordonnée qui soit un *maximum*, ou un *minimum*. S'il n'y a que deux ou trois racines qui soient égales, il y aura deux ordonnées qui seront un *maximum*, ou un *minimum*; & si toutes les racines sont inégales, il y aura quatre pareilles ordonnées.

861. Pour donner quelques exemples des cas les plus simples. Soit $y = a^2x - x^3$, on aura $\dot{y} = a^2 - 3x^2$, & $\ddot{y} = -6x$. Supposons $\dot{y} = 0$, & $3x^2 = a^2$, ou $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$, au-

quel cas $\ddot{y} = -\frac{6ax^2}{\sqrt{3}}$. Donc $\ddot{y}$ étant négative, y est un *maximum* lorsque $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$, & sa plus grande valeur est $\frac{2a^3}{3\sqrt{3}}$. Si $y = aa + 2bx - xx$, on aura $\dot{y} = 2b\dot{x} - 2x\dot{x}$, & $\ddot{y} = -2\dot{x}^2$; par conséquent y est un *maximum*, lorsque $2b - 2x = 0$, ou $x = b$. Si $y = aa - 2bx + xx$, on aura $\dot{y} = -2b\dot{x} + 2x\dot{x}$, $\ddot{y} = 2\dot{x}^2$; donc y est maintenant un *minimum* lorsque $x = b$, si a est plus grand que b .

862. Les droites BF & GH étant perpendiculaires à la droite donnée BG, dans le même plan, H un point donné, C un autre point sur BF, & la figure étant supposée rouler autour de l'axe BG, il faut déterminer la position de la droite HC, lorsque la surface conique qu'elle décrit est un *minimum*. Que DE coupe également BG, & perpendiculairement en D, & qu'elle rencontre HC en E; par l'article 216. la surface décrite par HC, autour de l'axe BG, sera comme DE. EH = (supposant GH = a , DG = b , DE = x , & par conséquent EH² = $bb + (a - x)^2$) $x\sqrt{bb + aa - 2ax + xx}$. Supposons donc $y = b^2x^2 + a^2x^2 - 2ax^3 + x^4$, nous aurons $\dot{y} = 4x^3\dot{x} - 6ax^2\dot{x} + 2a^2x\dot{x} + 2b^2x\dot{x}$, & $\ddot{y} = 12x^2\dot{x}^2 - 12ax\dot{x}^2 + 2a^2\dot{x}^2 + 2b^2\dot{x}^2$. En supposant $\dot{y} = 0$, nous avons $(4x^3 - 6ax^2 + 2aa + 2bb)x = 0$, & la résolution de cette équation donne (outre $x = 0$) $x = \frac{3a + \sqrt{aa - 8bb}}{4}$, ou $x = \frac{3a - \sqrt{aa - 8bb}}{4}$. Si GH = BG $\sqrt{2}$, alors $aa = 8bb$, & ces deux valeurs de x deviennent égales l'une à l'autre, & à $\frac{3}{4}a$. En ce cas $\frac{\ddot{y}}{\dot{x}^2} = 12 \cdot \frac{3a}{4} \times \frac{-a}{4} + 2aa + \frac{aa}{4} = 0$, & y n'est ni un *maximum*, ni un *minimum*; & pendant qu'on suppose que le point C se meut de B, le long de la droite BF, la surface conique, décrite par la droite HC autour de l'axe BG, croît continuellement, quoique sa Fluxion disparaisse, lorsque

$DE = \frac{3}{4} GH$. Si GH est plus grand que $BG\sqrt{2}$, alors $aa > 8bb$, la premiere valeur de x donne $\ddot{y}$ positive, & y est un *minimum*; mais la seconde valeur de x donne $\ddot{y}$ négative, & y est un *maximum*; c'est - à - dire, que la valeur de y , lorsque $x = \frac{3a - \sqrt{aa - 8bb}}{4}$ est plus grande que ses valeurs voisines, de part & d'autre. Mais cela ne doit pas s'entendre comme si la valeur de y étoit alors la plus grande possible; car, il est clair qu'en supposant que le point C s'avance sur la droite BF , $DE.EH$ peut surpasser tout rectangle donné. On trouve souvent des exemples de cette espece, & ce qu'on a démontré des ordonnées, s'applique aux rayons qui sont menés d'un point donné à une courbe, par l'article 277.

2863. Lorsque $\dot{y} = 0$, si $\dot{y}$ est en même-tems infinie, par rapport à $\dot{x}$, (que l'on suppose constante) on ne peut pas conclure que y soit alors un *maximum*, ou un *minimum*, sans aller plus avant; car l'ordonnée peut alors passer par un point de rebroussement, ou d'inflexion. Soit $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\sqrt{ax - xx}}{a}$, nous aurons

$\frac{\ddot{y}}{\dot{x}^2} = \frac{a - 2x}{2a\sqrt{ax - xx}}$. La supposition de $\dot{y} = 0$, donne $ax - xx = 0$, & $x = a$, ou $x = 0$; dans ces deux cas $\ddot{y}$ est infinie; & il est clair que la courbe se refléchit depuis l'ordonnée, parce que lorsque x est supposée plus grande que a , ou négative, les valeurs de $\dot{y}$ sont imaginaires. De même, si $\dot{y}$, $\ddot{y}$ & $\ddot{\dot{y}}$ & $\ddot{\ddot{y}}$ est infinie, par rapport à $\dot{x}$, nous ne pouvons pas en conclure que y soit un *maximum*, ou un *minimum*. Mais on doit prendre pour regle, que lorsque $\dot{y} = 0$, $\dot{x}$ étant constant, si $\ddot{y}$ est réel & fini; ou si un nombre impair de Fluxions de y des ordres successifs $\dot{y}$, $\ddot{y}$, $\ddot{\dot{y}}$, &c. disparoissent en même-tems, & que la Fluxion de l'ordre suivant soit réelle & finie, par rapport à $\dot{x}$; nous pouvons sûrement conclure, sans autre examen, que y est alors un *maximum*, ou un *minimum*, selon que cette dernière Fluxion est négative, ou positive. Néanmoins, lorsqu'après avoir supposé

$\dot{y}=0$, on détermine x par une simple équation, nous pouvons conclure, sans autre recherche, que y est un *maximum*, ou *minimum*.

864. On avoit observé, dans l'article 244. que lorsqu'une quantité N est exprimée par une fraction $\frac{P}{Q}$, si P & Q disparaissent en même-tems, nous ne pouvons pas en conclure que $N=0$. Ainsi, supposant $N = \frac{aa - ax}{a - \sqrt{ax}}$; lorsque $x=a$, le numé-

rateur & le dénominateur de N disparaissent en même-tems; mais si nous réduisons la valeur de N à une forme plus simple, en divisant le numérateur & le dénominateur, par leur diviseur commun $\sqrt{a} - \sqrt{x}$, nous trouverons $N = a \frac{\sqrt{a} + \sqrt{x}}{a} =$ (lors-

que $x=a$) $a \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = 2a$. Dans ces sortes de cas, on trouve

la valeur de N , en calculant $\frac{\dot{P}}{\dot{Q}}$; parce que lorsque P & Q décroissent jusques à disparaître, la dernière raison de P à Q est celle de $\dot{P}$ à $\dot{Q}$. Si P & Q disparaissent en même-tems, alors

$N = \frac{\dot{P}}{\dot{Q}}$. Cette règle a été donnée dans *l'analyse des infinimens*

petits, p. 145. & elle sert souvent à prévenir les erreurs, touchant les grandes & moindres ordonnées (comme on l'a fait voir dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* 1706.) aussi-bien qu'en d'autres occasions. On a abrégé souvent le calcul, dans ces sortes de recherches, par l'article 730. Par exemple, si $mxx = nyx + yx(mn - 1)$, on aura $y + mx \times x - ny = 0$, &

$$\dot{y} + m\dot{x} \times x - n\dot{y} = 0.$$

865. On trouve, de même, en certains cas, la plus grande & la moindre ordonnée, en supposant $\dot{y}$ infinie, par rapport à x ; mais il est clair qu'il y a plusieurs exceptions à cette règle; parce que la courbe peut alors former un arc continu, qui se réfléchit de l'ordonnée après l'avoir touchée, ou qui peut se continuer de l'autre côté avec une inflexion contraire.

Voyez l'art. 262. En comparant les signes de $\dot{y}$ des différens

côtés de l'ordonnée, (qui, en ce cas, est une tangente à la courbe) le dernier de ces cas, peut se distinguer de celui où l'ordonnée est un *maximum*, ou un *minimum*; & lorsque la courbe se réfléchit de l'ordonnée, quelques-unes des valeurs de y deviennent imaginaires de l'un des côtés de cette ordonnée. Pour ce qui est des *maximum* & *minimum*, que l'on nomme de la seconde espèce, dans l'article 240. lisez l'article 276.

866. Les points de rebroussement & de réflexion se déterminent ordinairement, en supposant $\ddot{y} = 0$, ou à l'infini. Mais cette règle étant susceptible de plusieurs exceptions, on a fait voir dans l'article 263. que l'ordonnée y passe par un point de rebroussement, lorsque la courbe étant continuée des deux côtés de l'ordonnée, y est un *maximum* ou *minimum*; ce qui (par ce qui a été démontré,) n'arrive pas toujours lorsque $\ddot{y} = 0$, ou à l'infini. Ainsi lorsque $\ddot{y} = 0$, & $\ddot{y}$ est réel & fini, alors y passe par un point d'inflexion. Cela se voit aussi, en comparant les valeurs de PM & pm , dans l'article 859. Que PM rencontre la tangente

Fig. 319.

du point F en V , & pm en v ; alors $PV = e + \frac{\dot{E}x}{x}$, & $pv = E - \frac{\dot{E}x}{x}$. Mais lorsque $\ddot{E} = 0$, $PM = E + \frac{\dot{E}x}{x} * + \frac{\ddot{E}x^3}{x^3} + \&c.$ & $pm = E - \frac{\dot{E}x}{x} * - \frac{\ddot{E}x^3}{x^3} + \&c.$ par conséquent

si $\ddot{E}$ est positif, & les distances AP , Ap assez petites, sera plus grand que PV & pm moindre que pv ; & soit que $\ddot{E}$ soit positif, ou négatif, les arcs FM & Fm feront de différens côtés de la tangente TFt ; & par conséquent F sera un point d'inflexion. Mais si $\ddot{E}$ dispaçoit en même tems, & que $\ddot{E}$ ait une valeur réelle, PM & pm seront tous les deux plus grands, ou plus petits que les perpendiculaires respectives PV & pv interceptées par la tangente, & il n'y aura point d'inflexion en F . En général, si $\ddot{y}$, $\ddot{y}$, $\ddot{y}$, &c. disparaissent, le nombre de ces Fluxions étant impair, & la Fluxion de l'ordre suivant, ayant une valeur réelle & finie, y passe par un point d'inflexion; mais si le nombre de

ces Fluxions, qui disparoissent, est pair, on ne peut pas dire qu'il passe par un tel point; à moins qu'on ne dise qu'il peut se former, en un seul point, une double Fluxion infiniment petite. Pour en donner un exemple des plus simples, soit $y = 1 - x^4$, on aura $\dot{y} = -4x^3 \dot{x}$, $\ddot{y} = -12x^2 \ddot{x}$, $\dddot{y} = -24x \dddot{x}$, & $y'''' = -24 \dot{x}^4$. Si l'on suppose $\ddot{y} = 0$, ou aura $x = 0$, mais parce que $\dot{y}$ est aussi alors zéro, & $\dot{y}$ réel & fini, y ne passe pas par un point d'inflexion; mais c'est un *maximum*. On peut aisément faire voir la vérité de cela d'une autre manière.

867. En supposant la courbe continuée, depuis l'ordonnée PM ou y des deux côtés, si $\ddot{y}$ est infinie, M n'est donc pas toujours un point d'inflexion, comme $\dot{y}$ n'est pas toujours, en ce cas, un *maximum*, ou un *minimum*, par l'article 865. & la courbe peut avoir sa concavité tournée du même côté, de part & d'autre de M. Mais on peut, de même, distinguer ces cas, en comparant les signes de $\dot{y}$ des deux côtés de P M; car, lorsque ces signes sont différens, M est un point d'inflexion; par exemple, soit $y = 1 - x^{\frac{2}{3}}$, on aura $\ddot{y} = -\frac{10x^{\frac{2}{3}}}{9\sqrt{x}}$, qui devient infini, lorsque $x = 0$, ou $y = 1$, & qui est affecté de signes contraires de différens côtés de y ; par conséquent l'ordonnée passe par un point d'inflexion, lorsque $x = 0$. Les suppositions de $\dot{y} = 0$, ou à l'infini, & de $\ddot{y} = 0$, ou à l'infini, servent à nous diriger, lorsque nous cherchons les *maximum* & *minimum*, & les points d'inflexions; mais elles ne suffisent pas pour nous assurer leur découverte; car, quoiqu'une ordonnée, ou une Fluxion, qui est positive, ne devienne jamais tout-à-coup négative, mais seulement en décroissant, ou en croissant par degrés; (comme on l'a fait voir dans l'article 262.) cependant, après avoir décrû jusques à disparoître, elle peut encore croître & continuer toujours d'être positive; ou après avoir augmenté jusques à devenir infinie, elle peut encore diminuer, sans changer de signe.

868. On a distingué, dans l'article 268. deux sortes de points de rebroussement. Lorsque la courbe revient de l'ordonnée P M

ou y , elle forme toujours une pointe, excepté lorsque $\dot{y}$ est infinie, par rapport à $\dot{x}$, auquel cas, M est encore quelquefois une pointe de la seconde espece; & lorsque $\ddot{y}$ ou $\ddot{y}$ est réelle & finie, M est toujours une pointe de la seconde espece. Si $\ddot{y} = 0$, la pointe peut être de l'une ou l'autre espece. Mais l'espece la plus simple des pointes de la premiere sorte (telles que celles qui se trouvent dans quelques lignes du troisieme ordre) se forme lorsque $\ddot{y}$ est infinie, comme l'espece la plus simple des points d'inflexion se forme lorsque $\ddot{y} = 0$; voyez les articles 270 & 379. Lorsque $\dot{y}$ est un *maximum* ou *minimum*, telle qu'il est décrit dans l'article 865, y passe par une pointe de la premiere espece. On peut tirer d'autres observations de l'article 269.

Fig. 322.

869. Supposons (comme dans l'article 857.) ST perpendiculaire du point donné S, sur la tangente PT en T, $SP = r$, la Fluxion de la courbe égale à $\dot{s}$, celle de l'arc fP décrit du centre S égale à $\dot{z}$; par conséquent $ST = \frac{r \dot{z}}{\dot{s}}$; & (par l'article 281.) P est un point d'inflexion, lorsque l'angle SPT est oblique & que ST est un *maximum*, ou un *minimum*. D'où l'on peut tirer des regles analogues aux premieres, pour déterminer ces points. Supposons $\dot{z}$ constante, & la Fluxion de ST étant égale à $\frac{\dot{z} \dot{r} \dot{s} - r \dot{s} \dot{z}}{\dot{s}^2}$; on

trouvera les points d'inflexion, en supposant $\dot{r} \dot{s} - r \ddot{s}$, ou (parce que $\dot{s} \dot{s} = \dot{r} \dot{r} + \dot{z} \dot{z}$, & $\dot{s} \ddot{s} = \dot{r} \ddot{r}$) $\dot{s}^2 - r \ddot{r}$ égal à zéro, ou à l'infini; mais avec des restrictions semblables à celles des articles 866 & 867.

Fig. 319.

870. Soit C le centre de la courbure en M, Cb perpendiculaire à PM en b, AP = x, PM = y, l'arc FM = s, & (par l'article 382.) supposant $\dot{x}$ constant, $Mb = \frac{\dot{s}^2}{\dot{y}} = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{y}}$,

ou (parce que $\dot{s} \dot{s} = \dot{y} \dot{y}$) $Mb = \frac{\dot{y} \ddot{y}}{\dot{y}^2}$, & le rayon de courbure

bure $CM = \frac{\dot{y}^3}{x\ddot{y}}$. Par exemple, si $ay = xx$, on aura $a\dot{y} = 2x\dot{x}$, $a\ddot{y} = 2\dot{x}^2$, $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \frac{4xx + aa}{aa} \dot{x}^2 = \frac{4y + a}{a} \dot{x}^2$, & $Mb = \frac{\dot{x}^2}{\dot{y}} = 2y + \frac{1}{2}a$. Si le rayon de courbure est exprimé par R , la variation de courbure (selon l'explication de Newton) fera comme $\frac{\dot{R}}{\dot{y}}$. Mais nous nous sommes assez étendu sur ce sujet dans le Chap. XI. du Liv. I.

871. Reprenant les suppositions de l'article 869. soit $ST = p$, Fig. 322. le rayon de courbure en P , ou $PC = \frac{r\dot{r}}{\dot{p}}$, & si CI est per-

pendiculaire à SP en I , $IP = \frac{p\dot{r}}{\dot{p}}$. Cela a été démontré dans l'article 384. & peut se prouver brièvement en cette manière. Soit St perpendiculaire à pt tangente en p , & que les arcs tn , pu , décrits du centre S , rencontrent ST & SP , en n & u . Les angles PCp , TSt étant égaux, PC fera à ST , en dernière raison de Pp à tn ; mais IP est à PC , en dernière raison de pu à Pp ; donc IP est à ST , en dernière raison de pu à tn , c'est-à-dire, de $\dot{r}$ à $\dot{p}$. Donc $IP = \frac{p\dot{r}}{\dot{p}}$, & $PC = IP \cdot \frac{r}{p} = \frac{r\dot{r}}{\dot{p}}$;

& en substituant à $\dot{p}$ la Fluxion de $\frac{r\dot{z}}{\dot{y}}$, ou (supposant que le cercle AD est décrit avec le rayon donné SA du centre S , que SP rencontre toujours ce cercle en D , $SA = a$, $AD = c$, & par conséquent $\dot{z} = \frac{r\dot{c}}{a}$) de $\frac{rr\dot{c}}{a\dot{y}}$, & supposant $\dot{c}$, $\dot{z}$, $\dot{y}$,

ou r constantes, on peut en dériver différentes formules pour exprimer le rayon de courbure CP , ou la demi-corde IP du cercle de courbure qui passe par S . Pour en donner un exemple des plus simples, soit $\dot{y} : \dot{z} :: a^n : r^n$, comme pour les fi-

gures construites dans l'article 393. on aura $p = \frac{r \dot{z}}{\dot{s}} = \frac{r^{n+1}}{a^n}$,

$$\frac{\dot{p}}{p} = (n+1) \frac{\dot{r}}{r}, \quad IP = \frac{p \dot{r}}{\dot{p}} = \frac{r}{n+1}, \quad \& \quad PC = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{a^n}{r^{n-1}}.$$

872. Le reste subsistant, comme dans le dernier article, soit S un point de lumière, SP un rayon incident sur la courbe AP, & réfléchi par cette courbe, en sorte qu'il touche la *caustique* en m. L'angle CPm est donc = CPS, & le rayon réfléchi Pm

est à l'incident PS, (ou r) comme 1 est à $\frac{2r}{p}$. $\frac{\dot{p}}{\dot{r}} \mp 1$,

cette unité devant être ajoutée, ou soustraite, selon que l'arc en P à sa convexité, ou sa concavité vers le point de lumière S. Car, si CR est perpendiculaire à PR en R, PR divisée également en q, & si l'on prend Ps, sur le rayon réfléchi, égale au rayon incident PS; on aura (article 410.) qs : qR :

qm, & Pq étant égal à $\frac{p \dot{r}}{2 \dot{p}}$, il suit que Pm : PS :: $\frac{p \dot{r}}{2 \dot{p}} : r$

$\mp \frac{p \dot{r}}{2 \dot{p}}$. Par exemple, si $\dot{s} : \dot{z} :: a^n : r^n$, on aura $\frac{r}{p} \cdot \frac{\dot{p}}{\dot{r}} = n$

+ 1, & Pm : PS :: 1 : 2n + 1.

Fig. 322.
N. 2.

873. Supposons que la courbe AP brise le rayon SP, & que PM soit le rayon rompu, qui touche, en ce cas, la *caustique* en M. Le reste de la construction subsistant comme auparavant, soit Cr perpendiculaire à PM en r, PR = e, Pr = f, PM = x, & que la raison constante du sinus d'incidence au sinus de réfraction, (ou de CR à Cr) soit celle de n à 1. Nous aurons (par l'article 413.) PM : rM :: x : x - f :: CR. SP. Pr : Cr. SR. PR. :: n f r : (r $\mp$ e) e; par conséquent x =

$$= \frac{n f f r}{n f r - e r \pm e e}, \quad e \text{ étant } = \frac{p \dot{r}}{\dot{p}}, \quad \& \quad f = \frac{\dot{r}}{n \dot{p}} \\ \sqrt{(n n - 1) r r + p p}.$$

Fig. 322.
N. 1.

874. Supposons que la courbe AP soit décrite par des forces centripètes, & que la force, qui agit sur un point P, soit di-

rectement comme le quarré de la vitesse en P, & réciproquement comme la demi-corde du cercle de courbure, qui est dans la direction de la force : lorsqu'elle est dirigée vers un centre donné S, l'aire décrite par le rayon SP autour de S flue uniformément; la vitesse en chaque point P est réciproquement comme ST, perpendiculaire abaissée de S, sur la tangente, & elle est à la vitesse par laquelle un cercle seroit décrit, autour de S, à la même distance SP, par la même force centripete, com-

me $\sqrt{\frac{\dot{r}}{r}}$ à $\sqrt{\frac{\dot{p}}{p}}$; & la force en P est comme $\frac{\dot{p}}{p^3 r}$,

parce que la vitesse est comme $\frac{1}{p^2}$, & $PI = \frac{p \dot{r}}{\dot{p}}$. La mê-

me force est comme $\frac{\ddot{s}}{-r}$, ou comme $\frac{\dot{z}^2}{r} \mp \ddot{r}$, la Fluxion

de l'aire (ou rz) étant supposée constante. Ainsi supposé que $\dot{s} : \dot{z} :: a^n : r^n$, la force centripete, dirigée vers S, sera réciproquement comme la puissance de SP de l'exposant $2n+3$

(parce que $p = \frac{r^{n+1}}{a^n}$ & $\frac{\dot{p}}{p^3} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{a^{2n} \dot{r}}{r^{2n+3}}$), & la vitesse en P à la vitesse dans un cercle, à la même distance, com-

me $\sqrt{\frac{\dot{r}}{r}}$ à $\sqrt{\frac{\dot{p}}{p}}$, c'est-à-dire, comme 1 à $\sqrt{n+1}$. La démonstration, que j'avois promise, dans l'article 451. peut se faire en cette maniere.

875. Soit AMB une figure décrite par une force centripete tendante vers S, & qui est toujours comme la puissance de la distance SM de l'exposant m . Faites l'angle ASL : ASM :: $m+3 : 2$; & supposant SA = 1, SM = x , SL = r , soit $r = x^{\frac{m+3}{2}}$; c'est-à-dire, que l'angle ASL soit à l'angle ASM, & que le logarithme du rayon SL, au logarithme de SM, soit toujours en même raison invariable de $m+3$ à 2; la courbe ALD pourra être décrite par une force centripete, dirigée vers S, laquelle varie toujours comme la puissance de la distance SL, dont l'exposant est $\frac{4}{m+3} - 3$. Car, soient SQ & SP per-

M m ij

pendiculaires aux tangentes respectives de AM & AL en Q

& P, $SQ = y$, & $SP = p$. Par la supposition $\frac{\dot{y}}{y^3 x} = e x^m$,

e représentant une constante. En prenant les fluentes, on a $\frac{1}{y^2}$

$$= 2K - \frac{2e x^{m+1}}{m+1}, K \text{ marquant une constante, selon l'article 735.}$$

Les triangles SMQ, SLP étant semblables, (article 394.) il suit que $\frac{1}{p^2} = \frac{x^2}{r^2 y^2} =$ (parce que $r^2 = x^m + 3$)

$$\frac{1}{y^2 x^{m+1}} = \frac{2K}{x^{m+1}} - \frac{2e}{m+1} = 2Kr - \frac{2m+2}{m+3} -$$

$$\frac{2e}{m+1}, \text{ \& } \frac{\dot{p}}{p^3 r} = \frac{4m+4}{m+3} Kr - \frac{3m-5}{m+3}, \text{ ou comme la}$$

puissance de r de l'exposant $\frac{4}{m+3} - 3$. Si les rayons menés

de S sont perpendiculaires à la courbe AMB en A & B, & à la courbe ALD en A & D, l'angle ASD : ASB :: $m+3$: 2, par la construction.

Fig. 322.

876. Supposons que la force centripète soit toujours la même, à égales distances du centre S. Que e & V marquent les forces aux distances respectives SA, & SP, h & u les vitesses en A & P, soit $SA = a$, & $SP = r$, on aura $uu = F$.

$- 2V\dot{r}$, (par l'article 435.) & en déterminant cette fluente, on doit faire en sorte que u soit $= h$, lorsque $r = a$. Lorsque $V : e :: r : a$, ou :: $aa : rr$, la trajectoire est une section conique, par l'article 445 & 446. & lorsque $V : e :: a^3 : r^3$, on peut construire la trajectoire par les aires des sections coniques, comme plusieurs Auteurs l'ont déjà démontré. Lorsque $V : e :: a^5 : r^5$, on construit la trajectoire, en quelques cas particuliers seulement, par les aires des sections coniques, (ou par les arcs circulaires & logarithmes) ; mais on la construit, en général, par les arcs des sections coniques. En ce cas, un corps peut descendre continuellement, sur une ligne spirale, vers le centre, & cependant ne jamais descendre jusques à entrer dans un cercle d'un certain rayon : un corps peut aussi s'éloigner du centre jusques à une certaine hauteur finie, où il n'arrivera jamais en roulant dans une spirale qui est toujours au-dedans d'un

certain cercle. Cette circonstance remarquable n'a pas lieu dans les trajectoires qui sont décrites dans les premiers cas, & que d'autres Auteurs ont déjà construites, & c'est pour cela que nous avons choisi la construction de ce cas, pour exemple de la Méthode de déterminer une trajectoire, par la loi de la force centripète.

877. Que h marque la vitesse, & AG ou GA la direction Fig. 324.

du corps à chaque point donné A . Que h soit à la vitesse avec laquelle le corps décrirait un cercle, à la même distance, par la même force centripète, comme $\sqrt{1+mm}$ à $\sqrt{2}$; c'est-à-dire, que $hh:ae::1+mm:2$. Que SG soit perpendiculaire à AG en G , & que chaque rayon SP , du centre S , rencontre la trajectoire en P , & le cercle Ax décrit du centre S , en x , $SA=a$, $SG=b$, $SP=r$, ST (perpendiculaire à la tangente en P) $=p$, l'arc $Ax=c$; & les mêmes Fluxions que

ci-devant représentées par $\dot{s}$ & $\dot{z}$. On aura $uu = F. \frac{-2as\dot{e}\dot{r}}{rs}$

$= \frac{as\dot{e}}{2r^4} + K =$ (parce que lorsque $r=a$, alors $uu=hh$

$= \frac{ae}{2} + K = \frac{1+mm}{2} ae$, enforte que $K = \frac{mmae}{2}$)

$\frac{a^4+mmr^4}{2r^4} ae = hh. \frac{bb}{pp} = \frac{1+mm}{2} \cdot \frac{ae\dot{b}\dot{b}\dot{s}^2}{rr\dot{z}^2}$; par con-

féquent $\dot{s}^2 : \dot{z}^2 :: a^4 + mmr^4 : (1+mm)bb r^2$, & $\dot{r}^2, \dot{z}^2$

$(= \frac{rr\dot{c}^2}{aa}) :: a^4 + mmr^4 - bb r^2 (1+mm) : (1+mm)$

$bb r^2$. Donc $\dot{c} = \frac{+r a b \sqrt{1+mm}}{\sqrt{a^4 - bb r^2 (1+mm) + mm r^4}}$. La raison

de $\sqrt{1+mm}$ à 1 est celle de la vitesse en A , dans la trajectoire, à celle qui seroit acquise, par une descente infinie, jusques

en A . Si $m=0$, $\dot{c} = \frac{r a b}{\sqrt{a^4 - bb r^2}}$, & la trajectoire est un

arc de cercle qui passe par S , & dont le diamètre est $= \frac{aa}{b}$; ce qui s'accorde avec l'article 437.

878. Cette trajectoire se construit par des arcs circulaires, & par des logarithmes, (& est de l'espece de ces spirales, dont il est parlé à la fin de l'article 343.) lorsque le corps

sort de A dans la trajectoire avec une vitesse, qui est à la vitesse, dans un cercle à la même distance SA, comme SA est à $\sqrt{SA^2 \mp \sqrt{SA^4 - SG^4}}$. En ce cas, (supposant $SA^2 : SG^2 :: n : 1$, ou $aa = nbb$) $1 + mm : 2 :: a^2 : a^2 \mp \sqrt{a^4 - b^4} :: n : n \mp \sqrt{nn - 1}$, $m = n \pm \sqrt{nn - 1}$, & $(1 + mm)bb = \frac{2aa}{n \mp \sqrt{nn - 1}} = 2maa$; par conséquent $\dot{c} = \frac{\mp raa\sqrt{2m}}{aa - mrr}$.

Supposons, 1^o. que la vitesse en A, dans la trajectoire, est à la vitesse, dans un cercle à la distance SA, comme $\sqrt{n}$ à $\sqrt{n \mp \sqrt{nn - 1}}$, (auquel cas, $m = n - \sqrt{nn - 1}$). Sur SA prolongée, prenez $Sk : SA :: 1 : \sqrt{m}$, décrivez le cercle kxK du centre S, prenez l'arc kK (du même côté de k que AG est de A) égal à $\frac{1}{\sqrt{2}}$ logarithme $\frac{1 - \sqrt{m}}{1 + \sqrt{m}}$, le module étant Sk ,

joignez SK, qui sera tangente de la trajectoire au point S. Pour trouver un autre point de la trajectoire, comme P; soit $SK = d$, prenez l'arc $Kx = \frac{1}{\sqrt{2}}$ logarithme $\frac{d - r}{d + r}$, joignez Sx, & sur la droite Sx prenez $SP = r$. Car, supposant l'arc $Kx = y$, on aura, par l'article 731. $\dot{y} = \frac{\mp ddr\sqrt{2}}{aa - mrr} =$ (parce que $dd :$

$aa :: 1 : m$) $\frac{\mp aar\sqrt{2}}{aa - mrr}$, & $\dot{c} = \frac{a\dot{y}}{d} = \frac{\mp aar\sqrt{2m}}{aa - mrr}$ comme

il doit être. Décrivez donc une hyperbole équilatère Knv , ayant son centre en S, & son sommet en K; soit une droite Srn , qui rencontre l'hyperbole en n , & la tangente du point K en r ; soit encore le secteur circulaire $SKx : SKn :: \sqrt{2} : 1$, & soit prise SP sur Sx égale à Kr, P sera un point de cette trajectoire. 2^o. Si la vitesse en A, dans la trajectoire, est à la vitesse dans un cercle, à la distance SA, comme $\sqrt{n}$ à $\sqrt{n - \sqrt{nn - 1}}$, on aura $m = n + \sqrt{nn - 1}$. On doit prendre SK moindre que SA, en raison de 1 à $\sqrt{m}$, le secteur $SKx : SKn :: \sqrt{2} : 1$, & l'on prendra SP sur le rayon Sx, en sorte que $Kr : SK :: SK : SP$.

Fig. 325.

Fig. 324.

879. Dans le premier cas, (lorsque la vitesse en A, dans la trajectoire, est à la vitesse dans un cercle, à la même distance,

comme a à $\sqrt{a^2 + \sqrt{a^4 - b^4}}$, si le corps part de A avec la direction GA , il formera ses révolutions dans une spirale, qui sera toujours en-dedans du cercle Kxz , & qui n'arrivera jamais à la hauteur SK depuis le centre S ; parce que Kr (à quoi la distance SP est toujours égale) ne peut pas devenir égale à SK , tant que l'aire SKn , ou l'arc Kx sont finis. L'aire, décrite par le rayon SP , autour du centre S , est toujours à l'aire hyperbolique formée par la droite rn , en raison invariable de

$$\sqrt{2} \text{ à } 1; \text{ parce que } z : y :: r\sqrt{m} : a, \frac{rz}{1} + \frac{y r \dot{r} \sqrt{m}}{2a} \\ = \frac{+ a r r \dot{r} \sqrt{2m}}{2aa - 2mrr}, \text{ \& la Fluxion de l'aire } K rn (= SKn$$

— SKr) est $\frac{a r r \dot{r} \sqrt{m}}{2aa - 2mrr}$. Donc, si le corps part de A avec la direction AG , il descendra dans la courbe APS au centre S , dans le tems, qu'en suivant la tangente AG avec sa vitesse en A , il auroit décrit autour de S un triangle égal à $\sqrt{2} \times KRN$, en supposant $KR = SA$. En cette figure, l'aire $SOPxK$ (terminée par la courbe SOP , l'arc circulaire Kx , & les droites SK & Px) est capable d'une quadrature parfaite, & elle est au triangle SKr , comme $\sqrt{2}$ à 1.

880. Dans le second cas, lorsque la vitesse en A est à la vitesse dans un cercle, à la même distance, comme a est à

$\sqrt{a^2 - \sqrt{a^4 - b^4}}$, si le corps part de A avec la direction AG , il roulera dans une spirale, qui s'approche toujours du cercle Kx sans pouvoir jamais y descendre; parce que SP

($= \frac{SK^2}{Kr}$) ne peut jamais devenir égal à SK dans un tems fini. Cette spirale a une asymptote à une distance de S égal à

$$\frac{SA^2}{SK} \times \sqrt{2}, \text{ parce que, par l'article 877. } pp = \frac{1 + mm}{a^4 + mmr^4}$$

$bb r^4$, & que la dernière valeur de pp est $\frac{1 + mm}{mm} bb =$ (dans

$$\text{ce cas) } \frac{aa \sqrt{2}}{a}.$$

881. Dans les autres cas, on peut construire la trajectoire par les arcs hyperboliques & elliptiques, selon l'article 805. Si la vitesse en A est à la vitesse dans un cercle, à la distance SA ,

comme $\sqrt{1 - mm}$ à $\sqrt{2}$, & que la direction en A soit perpendiculaire à SA (ou $a = b$), alors, en substituant, dans l'art 877.

$$-mm \text{ pour } mm, \text{ on aura } \dot{c} = \frac{-\dot{r}aa\sqrt{1-mm}}{\sqrt{a^4 - (1-mm)aar - mmr^4}}$$

$$= \frac{-\dot{r}aa\sqrt{1-mm}}{\sqrt{aa-rr} \times \sqrt{aa+mr}}, \text{ qui peut \u00eatre compar\u00e9e avec}$$

$$\frac{-\dot{b}bp}{\sqrt{aa-pp} \times \sqrt{bb+pp}}, \text{ en supposant } b = \frac{a}{m} \text{ \& } p = r. \text{ La}$$

fluente, de cette derni\u00e8re Fluxion, se trouve (article 805. Fig. 308.) \u00e9gale \u00e0 $\frac{b}{a} AR + AE - EP$. Donc, lorsque la vitesse, \u00e0 la distance SA, est moindre que la vitesse par laquelle un cercle seroit d\u00e9crit, \u00e0 la m\u00eame distance, en raison de $\sqrt{1 - mm}$ \u00e0 $\sqrt{2}$, on peut construire la trajectoire en cette mani\u00e8re. Soit $SD : SA :: 1 : m$, $Sb : SA :: \sqrt{1 - mm} : 1$. D\u00e9crivez une hyperbole AEx , dont les deux demi-axes soient SA & SD, & une ellipse ARb , dont les demi-axes soient SA & Sb; menez Ep , tangente \u00e0 l'hyperbole, en un point E, & Sp perpendiculaire \u00e0 Ep ; sur SA, prenez $SQ = Sp$, & que l'ordonn\u00e9e en Q rencontre l'ellipse en R; ensuite sur le cercle Axz , d\u00e9crit du centre S, prenez l'arc $Ax : \frac{1}{m} AR + AE - EP :: m\sqrt{1 - mm} : 1$, sur le rayon Sx , prenez $SP = Sp$, P sera un point dans la trajectoire. En ce cas, la vitesse en A est celle qui seroit acquise par un corps qui descend en A, de quelque plus grande distance, par la m\u00eame force centrip\u00e8te.

882. Lorsque la vitesse, \u00e0 la distance SA, est \u00e0 celle dans un cercle, \u00e0 la m\u00eame distance, comme $\sqrt{1 + mm}$ \u00e0 $\sqrt{2}$,

$$\text{alors } \dot{c} = \frac{+\dot{r}aa\sqrt{1+mm}}{\sqrt{aa-rr} \times \sqrt{aa+mmr}} = (\text{en supposant } pp =$$

$$= aa - rr) \frac{+\dot{p}aa\sqrt{1+mm}}{\sqrt{aa-pp} \times \sqrt{(1-mm).aa+mmpp}}; \text{ \& com-}$$

parant cette Fluxion avec celle de l'article 805. on voit que si m est moindre que 1, il faut prendre $SD : SA :: \sqrt{1 - mm} : m$ $Sb : SA :: 1 : \sqrt{1 - mm}$, & pour en venir \u00e0 la construction, comme dans le dernier article; apr\u00e8s avoir seulement d\u00e9termin\u00e9

terminé Sp & Ax , il faut prendre SP , sur le rayon Sx , égal à $\sqrt{SA^2 - Sp^2}$.

883. Lorsque m est plus grand que 1, alors en supposant $p = \frac{a\sqrt{rr-aa}}{r}$, & par conséquent $r = \frac{aa}{\sqrt{aa-pp}}$, $\dot{c}$

$$= \frac{\dot{p}aa\sqrt{1+mm}}{\sqrt{aa-pp}\sqrt{(mm-1)aa+pp}}$$
. Donc, en ce cas, il faut prendre $SD : SA :: \sqrt{mm-1} : 1$, $Sb : SA :: m : \sqrt{mm-1}$, pour déterminer Sp & Ax , comme dans l'article 881. & alors on prendra SP (sur le rayon Sx) égal à une troisième proportionnelle à $\sqrt{SA^2 - Sp^2}$ & SA . Si sur Sx on prend SP , troisième proportionnelle à Sp & SA , P fera un point, dans la trajectoire, décrit par une force centrifuge dirigée du centre S , laquelle est réciproquement comme la cinquième puissance, de la distance. Lorsque la direction du corps, à la distance SA , est oblique au rayon mené du centre S , on pourra construire les trajectoires d'une manière semblable.

884. Si la courbe FM est décrite par des puissances dirigées d'une manière quelconque, & que la force, en chaque point M , résultante de la composition de ces puissances, agisse dans la direction MK , & soit mesurée par MK ; décomposons MK en la force MO , dans la direction des ordonnées MP , ($=y$) & la force OK parallèle à la base AP ($=x$), alors, en supposant que le tems flue uniformément, ou la vitesse en M étant représentée par la Fluxion de la courbe FM , la force MO sera mesurée par $\ddot{y}$, & la force OK par $\ddot{x}$, par les articles 465 & 466. mais nous nous sommes étendus sur cela, & sur son usage, dans le Livre premier, Chap. XI. art. 465. &c.

885. Soit un corps qui descende le long de la courbe FPA , par sa gravitation vers S ; que le tems de son mouvement soit représenté par t , la vitesse en chaque distance SP , ou r par u , la force centripète à la même distance par g , l'arc FP par s ; le mouvement de ce corps, le long de cette courbe, sera accéléré par la force $\frac{-gr}{\dot{s}} = \frac{\ddot{u}}{\dot{u}} =$ (parce que $\dot{t} = \frac{\dot{s}}{u}$)

$\frac{u \dot{u}}{\dot{s}}$; par conséquent $u \dot{u} = -g \dot{r}$, $uu = F. - 2g \dot{r}$, & $\dot{r}$

$= \frac{\dot{s}}{\sqrt{F. - 2g \dot{r}}}$. Lorsque la pesanteur est uniforme, & agit

par des lignes parallèles, soit z l'espace parcouru dans une ligne verticale, depuis le commencement de la chute, on aura

$uu = F. 2g \dot{z} = 2g \dot{z}$, $\dot{r} = \frac{\dot{z}}{\sqrt{2gz}}$, & $t = \sqrt{\frac{2z}{g}}$. La pe-

Fig. 328.
N. 1.

santeur étant toujours uniforme, que le corps commence à descendre le long de la courbe DMS depuis D; que MN soit perpendiculaire à l'horizontale DA en N, l'arc SM = s , MN = z , & que t représente le tems de la chute, depuis M au point

le plus bas S, alors $\dot{r} = \frac{\dot{s}}{\sqrt{2gz}}$. Si DMS est un arc d'une demi-

cycloïde qui a son axe perpendiculaire à l'horizontale, le diamètre du cercle générateur = a , AS = b , on aura (par la seconde propriété de cette figure, dans l'article 805.) $\dot{s} : -\dot{z} ::$

$\sqrt{a} : \sqrt{b-z}$, & $\dot{r} = \frac{-\dot{z} \sqrt{a}}{\sqrt{2gz(b-z)}}$. Si N est à 1, comme

la demi-circonférence d'un cercle à son diamètre, N représentera la fluente de $\frac{-\dot{z}}{2\sqrt{z(b-z)}}$ qui est formée pendant que

z devient = b ; par conséquent le tems de la chute, dans l'arc de la cycloïde DMS, s'exprime par N $\sqrt{\frac{2a}{g}}$, & il est au

tems de la chute, dans l'axe a , (sçavoir $\sqrt{\frac{2a}{g}}$), comme

N est à 1; ainsi que nous l'avons trouvé dans l'article 408.

Fig. 328.
N. 2.

886. Mais lorsque DMS est un arc de cercle, t est une fluente d'un ordre plus élevé, & ne peut pas être représentée par les aires des sections coniques, mais par leurs arcs. Soit C le centre du cercle, HCS le diamètre vertical, MV perpendiculaire à HS en V, HS = E , CA = F , on aura $\dot{s} : -\dot{z} ::$
CS : MV :: $\frac{1}{2}E : \sqrt{\frac{1}{4}EE - FF - 2Fz - zz}$, & $\dot{r}$

$$= \frac{-Ez}{2\sqrt{gz} \times \sqrt{\frac{1}{4}EE - FF - 2Fz - zz}}.$$
 Comparons cette Fluxion avec $(\dot{Q} =) \frac{-bbz}{2\sqrt{az} \times \sqrt{bb - 2ez - zz}}$, dont la fluente a été déterminée dans l'article 805. & nous aurons $bb = \frac{1}{4}EE - FF$, ou $b = AD$, $2F = 2e = \frac{bb - aa}{a}$, & $a = \frac{1}{2}E - F = SA$. Soit donc S le centre, A le sommet, & SD l'asymptote de l'hyperbole AE; prolongez HD jusques à ce qu'elle rencontre Sb perpendiculaire à SA en k, prenez Sb = Dk, & décrivez l'ellipse ARb; soit SQ ou SP = $\sqrt{az}$, & la fluente Q fera représentée par $\frac{AD}{SA} AR + AE - EP$, par l'article 805. t le tems de la chute de M en S, sera exprimé par Q. $\frac{HS\sqrt{SA}}{AD^2\sqrt{2g}}$, & il est au tems de la chute dans la verticale SA, comme Q est à $\frac{AD^2}{CS}$.

887. Il suit, de l'article 807. que si la demi-circonférence est au diamètre, comme N est à 1, & que HA : AD :: m : 1, le tems, dans tout l'arc DMS, sera représenté par $\frac{HS \times N^2}{\sqrt{2g \times HA}}$

x $(1 - \frac{1}{4mm} + \frac{9}{64m^4} - \&c.)$ dont la dernière valeur, lorsque SA est supposée disparaître, est N. $\sqrt{\frac{HS}{2g}}$. Donc le tems de la chute, dans l'arc DMS, est à cette dernière valeur de t , (qui est dit être le tems dans un arc disparaissant, & qui, par l'article 885. est égal au tems, dans un arc de cycloïde, qui a le diamètre de son cercle générateur égal à $\frac{1}{2}CS$) comme $\frac{\sqrt{mm+1}}{m} \times (1 - \frac{1}{4mm} + \frac{9}{64m^4} - \frac{9}{256m^6} + \&c.)$ à 1.

Par une suite du même article 887. si SH : SA :: n : 1, tout le tems employé, dans l'arc DMS, sera au tems dans un arc infiniment petit, (ou dans la dernière valeur de t) comme $1 + \frac{1}{4n} + \frac{9}{64nn} + \frac{25}{256n^3} + \&c.$ à 1. Lorsque DMS est un quart de cercle, le tems de la chute se mesure par les arcs de la *lemniscata*, dont nous avons donné une construction aisée Fig. 307. dans l'article 803.

888. Si un corps descend, ou monte dans la ligne verticale z , dans un milieu, & que la résistance soit représentée par R , son mouvement est accéléré, ou retardé par $g \pm R = \frac{\pm \dot{u}}{i}$

$$= \frac{\pm \dot{u} \dot{u}}{z}; \text{ \& } \mp u \dot{u} = \dot{z} \times (g \pm R). \text{ Par exemple, si la ré-}$$

sistance est comme le quarré de la vitesse, & que a marque la vitesse, lorsque la résistance est égale à la pesanteur, ou $R : g ::$

$$uu : aa, \text{ on aura } \mp u \dot{u} = g \dot{z} \left(\frac{aa \pm uu}{aa} \right), \dot{z} = \frac{aa}{g}$$

$$\left(\frac{\pm \dot{u} \dot{u}}{aa \pm uu} \right), \text{ \& } i = \frac{\dot{u}}{g \pm R} = \frac{aa}{g} \left(\frac{\dot{u}}{aa \pm uu} \right); \text{ ainsi}$$

on peut trouver z & t par u , au moyen des logarithmes, ou des arcs circulaires. Voyez l'article 542. Lorsque le corps descend le long d'une ligne courbe, il est accéléré par l'excès de la force

$$\frac{-gr}{i} \text{ pardessus } R, \text{ qui est, par conséquent, égale à } \frac{u \dot{u}}{i}, \text{ \&}$$

s'il monte, la somme de ces forces est égale à $\frac{-u \dot{u}}{i}$. Lors-

Fig. 322.

qu'une trajectoire est décrite dans un milieu, & que la force centripete est dirigée vers S , soit cette force, en chaque point P , à la force centripete en P , par laquelle la même trajectoire seroit décrite dans le vuide, comme z est à a , & (retenant les mêmes symboles de l'article 869.) la résistance en P sera comme

$$\frac{\dot{z}}{p p i}, \text{ ou si l'aire de la figure est supposée fluer uniformément,}$$

comme $\dot{z} i$, (par l'article 452.) & elle est à la force centripete

en P , dans le milieu, comme $p i \dot{z}$ est à $2 z i \dot{p}$. Si la résistance R est en raison composée de la densité D , & du quarré de la vitesse uu , D est comme $\frac{R}{uu}$, ou (parce que uu est comme

$$\frac{az}{p p}), \text{ comme } \frac{\dot{z}}{a z i} : \text{ \& si la courbe est telle qu'elle puisse être}$$

décrite dans le vuide, par une force dirigée vers S , qui soit comme une puissance de la distance, D sera réciproquement

comme $\frac{r \dot{s}}{r}$. Si la force centripete, dans le milieu, est uniforme, & agit par des lignes paralleles, & que y soit une ordonnée, dans la direction de la force, la résistance sera à la pesanteur, comme $\ddot{y} \dot{s}$ est à $2 \ddot{y}^2$; & si R est comme $D u u$, D sera comme $\frac{\ddot{y}}{\dot{y} \dot{s}}$.

889. Soit FPA la figure que prend une chaîne parfaitement flexible, en gravitant vers un point donné S. ST, perpendiculaire abaissée de S, sur la tangente PT, fera réciproquement comme $F.g \dot{r}$, & la tension de la chaîne en chaque point P, réciproquement comme ST, par l'article 567. Si FPA est la ligne de la plus vite descente, depuis F au point le plus bas A, $SA = a$, $SP = r$ qui rencontre le cercle AD décrit du centre S en D, l'arc $AD = c$, & que u soit à a , comme la vitesse en P à la vitesse acquise en A; alors $\dot{c} = \frac{a u \dot{r}}{r \sqrt{rr - uu}}$, par les articles 581 & 582. Si la pesanteur agit par des lignes paralleles, soit PM ($= y$) une ordonnée dans la direction de la force, FM $= x$, l'arc FP $= s$, si FPA est la chaînette, $\frac{\dot{x}}{\dot{s}}$ sera comme $F.g \dot{y}$, par l'article 568. & si FPA est la ligne de la plus vite descente, u marquant la vitesse acquise en P, ou $u = \sqrt{F.2g \dot{y}}$ & a la vitesse acquise au point le plus bas A, on aura $\dot{s} : \dot{x} :: a : u$, par les articles 575 & 576.

890. La base AP étant représentée par x , & l'ordonnée PM par y , si l'on calcule $F.y \dot{x}$, & que l'on fasse évanouir l'expression lorsque $x = 0$, selon l'article 735. on aura l'aire APMF. Lorsque la fluente est négative, elle donne l'aire de l'autre côté de PM. Par exemple, soit $y = x^m$, on aura $F.y \dot{x} = F.x^m \dot{x} = \frac{x^{m+1}}{m+1}$ qui donne l'aire, lorsque m est un nombre positif, ou même négatif, moindre que 1. Mais lorsque m est un nom-

Fig. 322.

bre négatif plus grand que 1, cette expression est négative, & donne l'aire de l'autre côté de P M. L'aire produite par le rayon S P autour de S, (selon les symboles de l'article 869.) est la fluente de $\frac{r \dot{x}}{2}$, ou de $\frac{r r \dot{c}}{2 a}$. Nous avons eu, ci-devant, plusieurs

exemples du calcul des aires, par ces Théorèmes; & on a donné plusieurs Théorèmes généraux, pour ces calculs, dans les articles 752, 819, 830, 832, &c.

Fig. 319.

891. Le solide produit par l'aire A P M F autour de l'axe A P,

se trouve en calculant $F. 2 N y^2 \dot{x}$, ou N marque la raison de la demi-circonférence au diamètre. Par exemple, que la figure soit une section conique, A P l'axe, & l'équation générale de la figure, étant $yy = Ax + Bx + C$, le solide, produit par A P M F, autour de A P, fera égal à $\frac{2 A N x^3}{3} + N B x^2$

+ $2 N C x$. Prenons A p, de l'autre côté de A, égale à A P, & p m ordonnée en p, on aura $p m^2 = Ax + Bx + C$; par conséquent le solide produit par l'aire A p m F, autour de l'axe A p, fera égal à $\frac{2 A N x^3}{3} - N B x^2 + 2 N C x$. Donc, le solide,

produit par l'aire P M m p, est égal à $\frac{4 N A x^3}{3} + 4 N C x$.

Lorsque $x = 0$, $yy = C$; donc le solide produit par le rectangle P H h p (H F h étant parallèle à P p) est égal à $4 N C x$; & l'excès du solide, produit par l'aire P M m p sur ce cylindre, est $\frac{4 N}{3} . A x^3 =$ (en supposant $P p = 2 x = v$) $\frac{N A v^3}{6}$; lequel

(si $P Z : P p :: \sqrt{A} : 1$) est $\frac{1}{4}$ du cone produit par le triangle rectangle P Z p autour de P p, & est toujours de même grandeur, lorsque v & A sont les mêmes. Ce solide est plus grand, ou plus petit que le cylindre, selon que A est positif, ou négatif; & ils sont égaux lorsque $A = 0$, c'est-à-dire, lorsque la figure est une parabole. Par ce moyen, on démontrera brièvement les propriétés de ces solides rapportées ci-devant. Lorsque

la valeur de $F. 2 N y y \dot{x}$ est négative, elle représente le solide produit par l'aire de l'autre côté de l'ordonnée P M. Ainsi y

étant $= x^{-m}$, on aura $F. 2 N y y \dot{x} = \frac{2 N x^{-2m+1}}{2-m+1} = \frac{-N y y x}{2m-1}$, laquelle expression est négative, lorsque m est

plus grand que $\frac{1}{2}$, & elle représente la limite de laquelle le solide, produit par l'aire hyperbolique de l'autre côté de P M, s'approche continuellement, pendant que cette aire est supposée prolongée. Voyez, art. 307. &c.

892. L'arc F M est la fluente de $\dot{s}$ ou de $\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$. Par exemple, soit $ayy = x^3$, donc $y = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}$, $\dot{y} = \frac{3x^{\frac{1}{2}}\dot{x}}{2a^{\frac{1}{2}}}$, $\dot{s} = \frac{\dot{x}}{2} \sqrt{\frac{9x + 4a}{a}}$, & par l'article 727. $S = \frac{(9x + 4a)^{\frac{3}{2}}}{27a^{\frac{1}{2}}}$

+ K. Si l'on suppose $s = 0$, lorsque $x = 0$, alors $K = \frac{-8a}{27}$, & $s = \frac{(9x + 4a)^{\frac{3}{2}} - 8a^{\frac{3}{2}}}{27a^{\frac{1}{2}}}$. De même, si l'on fait usage de

l'expression, dans l'article 869. $\dot{s} = \frac{r\dot{r}}{\sqrt{rr - pp}}$; supposant, Fig. 322. N. 1.

par exemple, $app = r^3$, on aura $\dot{s} = \frac{r\dot{r}\sqrt{a}}{\sqrt{arr - r^3}} = r a^{\frac{1}{2}}$

$(a - r)^{-\frac{1}{2}}$, & (par l'article 727.) $s = 2a^{\frac{1}{2}}(a - r)^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{aa - ar}$. Si l'on suppose que A P est une parabole, S Fig. 329. le foyer, & A le sommet, T se trouvera toujours dans la droite A E perpendiculaire à S A; & l'arc parabolique A P = P T + logarithme (S T + T A), le module étant S A. Car, soit S A = a , S T = p , S P = r , A P = s , & P T = q , on aura

$pp = ar$, $\dot{s} = \frac{r\dot{r}}{\sqrt{rr - pp}} = \frac{r\dot{r}}{\sqrt{rr - ar}} =$ (parce que

$q = \sqrt{rr - ar}$, & $\dot{q} = \frac{2r\dot{r} - a\dot{r}}{2\sqrt{rr - ar}} \Big) \dot{q} + \frac{a\dot{r}}{2\sqrt{rr - ar}}$.

Mais si $u = S T + T A = \sqrt{ra} = \sqrt{ra - aa}$, on a $\frac{\dot{u}}{u}$

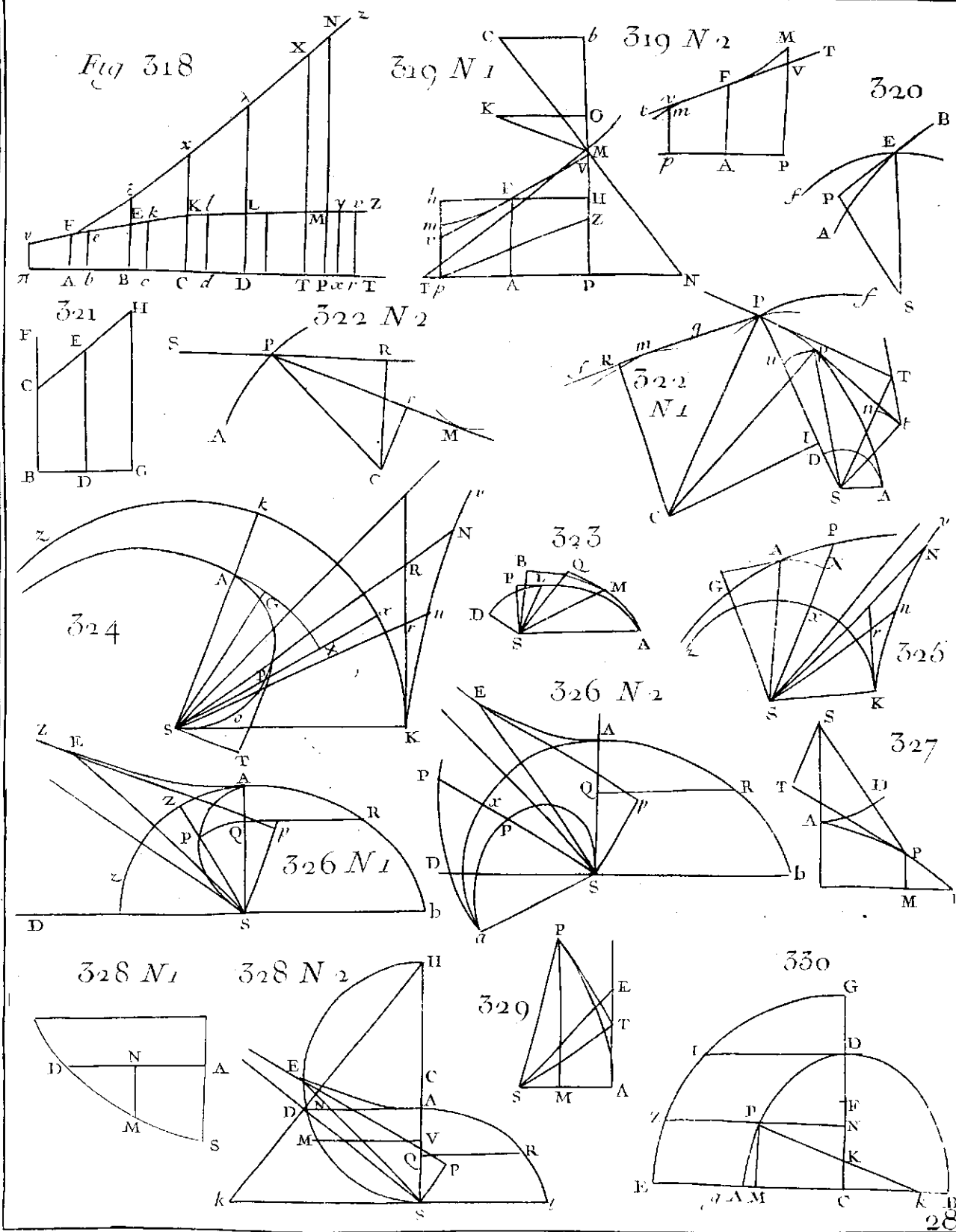
$= \frac{\dot{r}}{2\sqrt{rr - ar}}$; par conséquent $\dot{s} = \dot{q} + \frac{a\dot{u}}{u}$, & $s = q$

+ logarithme u , le module étant égal à a . Voyez l'article 746 & 845. pour la mesure des arcs circulaires, & art. 806, 807 & 808. pour les arcs hyperboliques & elliptiques.

Fig. 329. 893. La surface produite par l'arc s , lorsque la figure roule autour de la base, (l'ordonnée étant représentée par y , & la base par x ,) est $F. 4 N y \dot{s}$, ou $F. 4 N y \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$, par l'art. 229. Ainsi la parabole AP roulant autour de l'axe AMS, PM étant perpendiculaire à AS en M, $PM = y = 2 AT = 2 \sqrt{ar - aa}$, & $\dot{s} = \dot{r} \sqrt{\frac{r}{r-a}}$; par conséquent $y \dot{s} = 2 \dot{r} \sqrt{ar}$; la surface produite par l'arc AP est donc $\frac{16 N}{3} r \sqrt{ar} + K = \frac{16 N}{3} (SP.ST - SA^2)$, & (si SE est moyenne proportionnelle entre SP & ST) cette surface est au cercle du rayon AE, comme 8 à 3.

Fig. 330.

894. Soit C le centre, CD la moitié du grand axe, & CA la moitié du petit axe de l'ellipse ADB, E le foyer, PN perpendiculaire à CD, PM perpendiculaire à CA, & que PK, perpendiculaire à la courbe, rencontre CD en K, $CA = a$, $CD = b$, $CF = c$, $CN = x$, $PN = y$, & l'arc AP = s ; on aura $NK : NC :: a^2 : b^2$, ou $NK = \frac{a^2 x}{b^2}$, $PN^2 = \frac{a^2}{b^2} (bb - xx)$, $PK^2 = a^2 - \frac{a^2 c^2 x^2}{b^4}$, & $PK = \frac{a}{b} \sqrt{b^4 - c^2 x^2}$. Mais $\dot{s} : \dot{x} :: PK : PN = y$, $y \dot{s} = \frac{a x \sqrt{b^4 - c^2 x^2}}{b b} =$ (en supposant $c : b :: b : d = CG$) $\frac{a c x \sqrt{dd - xx}}{b b}$: soient donc CA & PN qui rencontrent le cercle GZE en E & Z, & lorsque la figure est supposée rouler autour de l'axe CD, la surface, produite par l'axe AP, sera à l'aire CEZN, comme $4 N. ac$ est à bb ; & si DI, perpendiculaire à CD, rencontre GZE en I, toute la surface du sphéroïde sera à la surface de la sphere du rayon CA, comme $\frac{4 N. ac}{b b} \times CEID$ est à $4 N a a$, c'est-à-dire, comme $EI + CA$ est à $2 CA$. De même, si PK prolongée rencontre AC en k, $Mk : MC (= y) :: b^2 : a^2$, & $PK = \frac{b}{a} \sqrt{a^4 + c^2 y^2}$. Soit $DP = f$, & $\dot{f} : \dot{y} :: Pk : PM$, ou $PM \dot{f} = y \dot{P}k$; par conséquent la Fluxion de la surface produite par l'arc DP autour de l'axe CA, est $\frac{4 N b y}{a. a} \sqrt{a^4 + c^2 y^2} =$ (si $c : a :: a : e = Cg$



$e = Cg) \frac{4Nb}{a} \cdot y \sqrt{ee + yy}$, dont la fluente est $\frac{2Nb}{e} \cdot y \sqrt{ee + yy} + 2Nb \cdot \text{logarithme}(y + \sqrt{ee + yy})$, le module étant égal à e , ou $Cg = 2N \times CM$. $Pk + 2Nb \cdot \text{logarithme}(CM + Pk \cdot \frac{Cg}{CD})$. Ainsi la surface produite par le quart elliptique DPA , autour de l'axe CA , est $2Nb \cdot (b + \text{logarithme } a \cdot \frac{b+c}{c})$, & la surface de ce sphéroïde est à celle d'une sphere du rayon CD , comme $CD + \text{logarithme } \frac{Cg \cdot CA}{DF}$ est à $2CD$, le module étant Cg . Ces constructions s'accordent avec *Harmon. mens.* de M. Cotes, p. 28 & 29. où il éclaircit le passage des arcs circulaires aux logarithmes, (ou des mesures des angles aux mesures des raisons) lequel se rencontre si souvent dans la résolution des différens cas d'un Problème, par une transiion analogue, observée, il y a long-tems, par Vieta, dans la résolution des équations cubiques, & en d'autres cas, par ce qui peut se nommer raison de trisection, (ou d'interposition de deux moyennes proportionnelles entre les termes d'une raison) en sorte que les tables trigonométriques & logarithmiques sont supplémens les unes des autres. L'harmonie de ces mesures, qui a été si bien observée par cet excellent Auteur, sera encore éclaircie par la résolution des deux Problèmes suivans, qui sont très-utiles, relativement au sphéroïde.

895. Dans l'usage des Cartes plates en navigation, on suppose les méridiens paralleles, & les degrés de longitude, aussi bien que ceux de latitude, égaux entre-eux; au lieu que les méridiens se coupant tous aux poles, les degrés de longitude décroissent en même proportion que les demi-diamètres des paralleles de latitude, & les degrés de latitude (à cause de la figure applatie de la Terre) croissent depuis l'équateur vers les poles. Pour corriger quelques-unes des erreurs qui résultent, dans la navigation, de ces fausses suppositions, on a inventé les Cartes réduites, (qu'on nomme communément en Angleterre, Cartes de *Mercator*) dans lesquelles les méridiens sont toujours supposés paralleles, & les degrés de longitude aussi étendus qu'auparavant; mais les degrés de latitude, sur les méridiens, sont augmentés en même proportion. Les arcs du méridien, ainsi augmentés, (ou les *parties méridionales*, ou *latitudes croissantes*,) se trouvent dans une sphere, ou dans une sphéroïde, par les Théorèmes

Fig. 331.
N. 1.

fuivans. Soit l'arc DH , ou l'angle DCH , la latitude pour laquelle on demande les parties méridionales z , HE son sinus; que CT divise également l'arc Hd , (complement de HD) & rencontre en T la tangente du point d . 1°. Dans la sphere $z = \text{logarithme } \frac{CD}{dT}$, le module étant CD . 2°. Dans le sphéroïde applati, soit Dh un arc, dont le sinus eh est à EH , comme CF , distance du foyer au centre, est à CD , demi-diamètre de l'équateur; que Ct divise également l'arc dh en t ; on aura $z = \text{logarithme } \frac{CD}{dT} - \frac{CF}{CD} \cdot \text{logarithme } \frac{CD}{dt}$. 3°. Dans le sphéroïde oblong, soit Dq l'arc dont la tangente est à EH , sinus de DH , comme CF est à CD , on aura $z = \text{logarithme } \frac{CD}{dT} + \frac{CF}{CD} \cdot Dq$.

Fig. 331.
N. 2.

896. Car, supposons que ADB soit la section d'un méridien par les poles A & B , comme dans l'article 894. soit $CA = a$, $CD = b$, $CF = c$, $CM = y$, $EH = u$, & l'arc elliptique $DP = s$. Pour trouver les parties méridionales z , nous devons supposer que l'élément, ou la Fluxion de l'arc DP , est toujours augmentée en raison de CD rayon de l'équateur à PM rayon du parallel de P , c'est-à-dire, $\dot{z} = \dot{s} \cdot \frac{CD}{PM} =$ (parce que $\dot{s} : \dot{y} ::$

$$PK : NK :: CH : CE) \frac{b \dot{y}}{\sqrt{bb - uu}} \times \frac{CD}{PM} = \text{(parce que}$$

$$PM : NK :: bb : aa, \& NK : CE :: PN : EH) \frac{\dot{y}}{y} \cdot \frac{aa u}{bb - uu}.$$

Par ce qui a été trouvé dans l'art. 894, $Pk = \frac{b}{aa} \sqrt{a^4 + c^2 y^2}$,

ou $\frac{b}{aa} \sqrt{a^4 - c^2 y^2}$, selon que CD est plus grand, ou plus petit que CA ; donc Pk étant à Mk , comme CH à EH , nous

aurons $u = \frac{bb y}{\sqrt{a^4 \pm c^2 y^2}}$, ou $y = \frac{aa u}{\sqrt{b^4 \pm c^2 u^2}}$, & (par l'ar-

$$\text{ticle 728.) } \frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{u}}{u} \pm \frac{cc u \dot{u}}{\sqrt{b^4 \pm c^2 u^2}} = \frac{\dot{u}}{u} \cdot \frac{b^4}{b^4 \pm cc u u}.$$

Donc $\dot{z} = \frac{aa b^4 \dot{u}}{(bb - uu) \times (b^4 \pm cc u u)}$, c'est-à-dire, $\dot{z} =$

$$= \frac{bb \dot{u}}{bb - uu} \text{ dans la sphere, } \dot{z} = \frac{bb \dot{u}}{bb - uu} - \frac{b^2 c^2 \dot{u}}{b^4 - c^2 u^2} \text{ dans}$$

le sphéroïde applati, & $z = \frac{bb\dot{u}}{bb-uu} + \frac{b^2c^2\dot{u}}{b^4+ccuu}$ dans le
 sphéroïde oblong. Supposons maintenant que db est le diamé-
 tre du cercle dDb , joignez dH & Hb , les triangles TdC
 & dHb étant semblables, $dT : dC :: dH : Hb :: \sqrt{Cd - EH} :$
 $\sqrt{Cd + EH}$, $dT = b \sqrt{\frac{b-u}{b+u}}$, & le module étant b , la
 Fluxion du logarithme $\frac{CD}{dT}$ (ou du logarithme $\sqrt{\frac{b+u}{b-u}}$)
 fera $\frac{bb\dot{u}}{bb-uu}$. De même, parce que $eh = \frac{cu}{b}$, $dt = b$
 $\sqrt{\frac{bb-cu}{bb+cu}}$, la Fluxion du logarithme $\frac{CD}{dt}$ (ou du logarith-
 me $\sqrt{\frac{bb+cu}{bb-cu}}$) est $\frac{b^3c\dot{u}}{b^4-ccuu}$: donc dans la sphere $z =$ lo-
 garithme $\frac{CD}{dT} =$ logarithme $CD -$ logarithme $T - d$: dans le
 sphéroïde applati, $z =$ logarithme $\frac{CD}{dT} - \frac{CE}{CD}$. logarithme $\frac{CD}{at}$.
 Dans le sphéroïde oblong, Dq est la fluente de $\frac{b^3c\dot{u}}{b^4+ccuu}$; par
 conséquent $z =$ logarithme $\frac{CD}{dT} + \frac{CF}{CD}$. Dq .

897. Ces logarithmes sont hyperboliques, ou de la premiere
 espece de Neper ; mais il est aisé d'appliquer ces Théorèmes
 aux logarithmes des tables, & d'exprimer en minutes, à l'or-
 dinaire, les parties méridionales. Ainsi dans la Sphere ôtez la tan-
 gente logarithmique du demi complément de la latitude, du lo-
 garithme du sinus total, (ou 10.00000) & multipliez le reste
 par 7915. 704467897, &c. (c'est-à-dire, par le nombre des mi-
 nutes contenues dans le sinus total, divisé par le module des ta-
 bles) le produit donnera les parties méridionales en minutes.

898. Dans le sphéroïde applati, nous avons cette regle aisée ;
 soit $CF : CD :: 1 : n$, & que u soit le sinus de la latitude don-
 née DCH , par laquelle on demande les parties méridionales.
 La table pour les parties méridionales, dans la Sphere, étant
 déjà calculée, cherchez dans cette table, celles qui sont pour
 la latitude, dont le sinus est $\frac{1}{n} \times u$, divisez-les par n , ôtez le
 quotient des parties méridionales de la même table pour la la-

titude donnée DCH; & le reste donnera les parties méridionales, pour la même latitude, dans le sphéroïde applati. On a résolu ce Problème par les suites infinies, & calculé une table des parties méridionales dans le sphéroïde applati; laquelle a été publiée en dernier lieu, dans un Traité ingénieux de M. Murdoch, on y suppose $cc : bb :: 22 : 1000$. On peut examiner cette table par cette règle, & elle peut, de même, pour faciliter le calcul lorsqu'on suppose une autre raison pour celle de cc à bb . On calcule aisément la plus grande différence entre les parties méridionales dans le sphéroïde applati, & dans la sphere, en trouvant les parties méridionales dans la sphere pour la latitude, dont le sinus est au rayon comme 1 à n , & en les divisant par n .

899. Dans le sphéroïde oblong, on trouve les parties méridionales pour la latitude, dont le sinus est u , en ajoutant aux parties méridionales dans la sphere pour la même latitude. $\frac{1}{n}$. Dq, Dq étant l'arc dont la tangente est $\frac{1}{n} \times u$.

Fig. 332.

900. Soit P M o u x une pyramide d'une densité uniforme sur la base rectangulaire M o u x, & supposons que l'attraction de ses particules soit en raison inverse, d'une puissance de la distance, dont l'exposant n est moindre que 3. Soit l'attraction à la distance donnée P C ($= a$) représentée par e , l'attraction à chaque distance P M ($= r$) par V; si les angles M P o, M P x sont continuellement diminués, la pesanteur en P vers la pyramide P M o u x fera finalement comme $\frac{V r}{3 - n} \times M o \times M x$. Car, si N n k l est une section de la pyramide, parallele à M o u x à la distance P N $=$ P C, la pesanteur en P, vers la pyramide, fera finalement égale à la fluente de $V r \cdot M o \cdot M x$, ou (parce que N l : M x ::

$$N n : M o :: a : r \text{ \& } V : e :: a^n : r^n) \text{ de } \frac{a^{n-2} e r}{r^n - 2} \times N l \times N n,$$

$$\text{c'est-à-dire, à } \frac{a^{n-2} e r^{3-n}}{3-n} \cdot N l \cdot N n = \frac{V r}{3-n} \cdot M o \cdot M x.$$

901. Par où l'on verra. (en procédant comme dans l'art. 642.) que si une portion d'un solide comprise par des plans qui se coupent mutuellement en P H attire une particule P; que P M A soit un de ces plans, que la droite P M rencontre le cercle P N C décrit du centre P, avec la distance donnée P C en N; que MQ

soit perpendiculaire à PC & NR à PH, PC = a , PM = r , PQ = z , PR = x ; que le sinus de l'inclinaison des plans soit au sinus total comme f à a ; & supposant que cet angle soit diminué continuellement jusques à disparaître, la dernière valeur de la pesanteur en P vers la tranche du solide compris par les plans, dans la direction PC, étant représentée par q , q fera égale à la fluente de $\frac{f V r^2 z \dot{x}}{(3-n) a a}$, ou de $\frac{a^{n-2} e f z \dot{x}}{3-n}$ ($r^2 = n$). Si PC se confond avec PH, on aura $x : a :: z : r$, & la pesanteur en P fera comme la fluente de $\frac{a^{n-3} e f (r^3 - n) x \dot{x}}{3-n}$. Si PH est perpendiculaire à PC la pesanteur en P vers la portion du solide fera finalement comme la fluente de $\frac{a^{n-3} e f}{3-n} r^{3-n} \dot{x} \sqrt{aa - xx}$, parce qu'en ce cas, $r : z :: a : \sqrt{aa - xx}$.

902. Si un solide est produit par la figure PMA autour de l'axe PC, & que la pesanteur en P, vers ce solide, soit mesurée Fig. 332
N. 2.

par Q, on aura $Q = \frac{4 N a^{n-2} e}{3-n} \times F. r^{3-n} x \dot{x}$, en supposant que N marque la raison de la demi-circonférence au diamètre; comme ci-devant. Par exemple, si PMA est un demi-cercle du rayon PC, alors PM = 2 PR, ou $r = 2x$, & $Q = F. \frac{N e a^{n-2} r^{4-n} \dot{r}}{3-n} =$ (lorsque r devient égal à $2a$ $\frac{2^{5-n} N a^3 e}{3-n \times 5-n}$).

Si $n = 2$, $Q = \frac{8 N a^3 e}{3}$, & la pesanteur est la même que si toute la matière étoit attirée dans la sphere du centre C, parce que le solide compris sous la sphere est $\frac{8 N a^3}{2-n^3}$; & dans les autres cas, la pesanteur est à cette attraction comme 3.2 est à $3-n \times 5-n$. Si $n = -1$, elles sont égales. Si $n = 0$, leur raison est celle de 4 à 5; & si $n = 1$, cette raison est celle de 3 à 4. En différentes spheres, lorsque n est donnée, la pesanteur est comme PC^{3-n} , parce que e est comme PC^{-n} .

903. Pour trouver l'attraction au pôle A vers un sphéroïde produit par la demi-ellipse ADB autour de l'axe AB, supposant que F se confonde avec A, AC = a , CD = b , CF (F étant le

foyer) = c , $AR = x$, $AQ = z$, $AM = r$, on aura $AR^2 : NR^2 :: AQ^2 : QM^2$, ou $xx : aa - xx :: zz : \frac{bb}{a} \cdot (2az - zz)$; par

conséquent $z = \frac{2b^3ax^2}{a^4 \mp c^2x^2}$, & (parce que $x : a :: z : r$) $r = \frac{2b^2ax}{a^4 \mp c^2x^2}$, ou $x = \frac{a^2}{rc^2} (\mp b^2 \pm \sqrt{b^4 \pm r^2c^2})$. Donc,

$$Q = \frac{2^5 - n Na^4 - n b^6 - 2ne}{3 - n}. \quad F. \frac{x^4 - n}{(a^4 \mp c^2x^2)^3 - n};$$

ou si l'on suppose $bb = dc$, Q sera $= \frac{4Na^n + 2b^2e}{(3 - n)c^4}$

$$\times F. \frac{2d^2c\dot{r} \mp cr^2\dot{r}}{r^n \sqrt{dd - rr}} = F. \frac{2b^2\dot{r}}{r^n}, \text{ laquelle fluente se mesure}$$

aisément par les aires des sections coniques, lorsque n est un nombre entier. Les signes supérieurs sont pour le sphéroïde oblong.

Fig. 334.

904. Pour trouver l'attraction au point D , dans l'équateur du sphéroïde, soit P confondu avec D , DBE une section du solide perpendiculaire à l'équateur, PH ou DH une tangente en D , HNc un cercle décrit du centre D avec le rayon Dc ($= CA$) qui rencontre DM en N , MQ perpendiculaire à DE , & NR à DH , $CA = a$, $CD = b$, $CF = c$, comme ci-devant, & $DQ = z$, $DM = r$, $DR = x$, on aura $NR^2 : DR^2 :: DQ^2 : QM^2$, c'est-à-dire, $aa - xx : xx :: zz : \frac{aa}{bb} (2bz - zz)$; & $z = \frac{aa}{bb} (2b - z)$, & $z = 2baa \left(\frac{aa - xx}{a^4 \mp c^2x^2} \right)$;

par conséquent $r \left(= \frac{az}{\sqrt{aa - xx}} \right) = \frac{2ba^3 \sqrt{aa - xx}}{a^4 \mp c^2xx}$. Donc,

$$q = \frac{a^n - 3ef}{3 - n} \cdot F. r^{3-n} \dot{x} \sqrt{aa - xx} = F. \frac{8a^6 b^3 f e \dot{x}}{(3 - n) \times (2aab)^n}$$

$$\times \frac{\frac{4 - n}{2} \frac{aa - xx}{(a^4 \mp c^2xx)^3 - n}}, \text{ qui donne la dernière valeur de la pe-}$$

santeur en D , vers une tranche du sphéroïde, comprise par deux plans perpendiculaires à son équateur, qui se coupent mutuellement en DH , lorsque l'angle compris par ces plans disparaît,

par l'article 901. Si l'on suppose $c = 0$, ou $a = b$, la dernière

Fluxion devient $= \frac{8a^n - 3ef\dot{x}}{(3-n)2^n} (aa - xx) \frac{4-n}{2} =$ (en

supposant $yy = aa - xx$) $\frac{a^n - 3ef}{(3-n)2^n} \times \frac{-y^5 - ny}{\sqrt{aa - yy}}$, dont

la fluente donne la dernière valeur de la pesanteur en D, vers la tranche de la sphere, (décrite sur le diamètre de l'équateur du sphéroïde) laquelle est comprise par les mêmes plans. Puisque les sections du sphéroïde, par des plans perpendiculaires à l'équateur, sont des ellipses semblables entre-elles, & à la section méridienne, & que les sections de la sphere, par ces plans, sont des cercles, la pesanteur en D, vers le sphéroïde, est à la pesanteur en D, vers la sphere décrite sur le diamètre de l'équateur, comme la première est à la dernière fluente, c'est-à-dire, (en

supposant $cc : aa :: m : 1$) comme F. $a^3 - n b^3 - n \dot{x} x$ $\times \frac{(aa - xx) \frac{4-n}{2}}{(aa \mp mxx)^3 - n}$ est à F. $\dot{x} (aa - xx) \frac{4-n}{2}$. Ces ex-

pressions fluxionnaires sont rationnelles, lorsque n est un nombre pair, & lorsque n est impair, on les rend rationnelles, en supposant $x = \frac{az}{\sqrt{aa + zz}}$. Ainsi, donc la pesanteur à l'équa-

teur, aussi-bien que celle aux poles, se mesure par des arcs circulaires; ou par des logarithmes, lorsque n est un nombre entier moindre que ∓ 3 .

905. Lorsque $n = 2$, la pesanteur au pole, ou à l'équateur, se calcule aisément par le premier Théorème, dans l'article 901.

sçavoir, $q = F. \frac{a^n - 2efzx}{3-n} r^{2-n} =$ (lorsque $n = 2$) F.

$efz\dot{x}$. Car, lorsque la particule P, dont la pesanteur est requise, est en A, comme dans l'article 903. z (ou AQ, supposant

AR = x), $= \frac{2bb}{a} \times \frac{xx}{aa \mp mxx}$, & $q = \frac{2b^2ef}{a} \times F.$

$\frac{x^2 \dot{x}}{aa \mp mxx}$; par conséquent la pesanteur au pole A, vers le sphéroïde, est à la pesanteur en A, vers la sphere du diamètre

A B, comme $b b . F . \frac{x^2 \dot{x}}{a a + m x x}$ est à $\frac{1}{3} a a$. Lorsque la particule P est en D sur la circonférence de l'équateur, supposons, comme dans l'article 904. $DR = x$, on aura $DQ = z = 2b$.

$\frac{a a - x x}{a a + m x x}$, & $q = F . e f z \dot{x} = 2 b e f . F . \dot{x} . \frac{a a - x x}{a a + m x x}$; par conséquent la pesanteur en D, sur la circonférence de l'équateur vers le sphéroïde, est à la pesanteur en D, vers la sphere sur le diamètre DE, comme $F . a b \dot{x} . \frac{a a - x x}{a a + m x x}$ est à $F . \dot{x} . (a a - x x) =$ (lorsque $x = a$) $\frac{2 a^2}{3}$. Et ces fluentes donnent les

mêmes constructions par les arcs circulaires & logarithmes, qui ont été données dans les articles 646 & 647. La pesanteur en chaque point P sur la surface du sphéroïde, dans la direction parallèle ou perpendiculaire à l'axe, peut se calculer, de même, par le Théorème $q = F . e f z \dot{x}$, mais ce cas se réduit au premier, par l'article 634. Lorsque la densité varie, mais en sorte qu'elle soit uniforme sur une surface semblable & concentrique à ADBE, la pesanteur en chaque point du plan de l'équateur, ou de l'axe du sphéroïde, peut se calculer par l'article 688. &c. Le Lecteur trouvera ce sujet, traité d'une différente maniere, dans un Mémoire ingénieux, *Phil. Transf.* N. 449. par M. Clairaut. On a démontré, dans l'article 636. &c. que si la densité de la Terre étoit uniforme, sa figure seroit un sphéroïde produit par une ellipse roulant autour de son second axe, selon la théorie de la pesanteur; mais l'on a pris cela comme une hypothese, dans les articles 679, 681, &c. ou l'on a supposé la densité variable.

Fig. 335. 906. Les centres de gravité & d'oscillation des figures, se déterminent par les articles 509 & 534. Soit G le centre de gravité, & O celui d'oscillation de la figure plane Ffmm, lorsqu'elle roule autour de l'axe Ff, OGA perpendiculaire à Ff en A, & à Mm en P, $AP = x$, $Mm = y$, $GA = z$, $OA = u$;

on aura $z = \frac{F . y x \dot{x}}{F . y \dot{x}}$, & $u = \frac{F . y x^2 \dot{x}}{F . y x \dot{x}}$. Ainsi lorsque $\frac{1}{2}y = x^m$,

$$z = \frac{F . x^{m+1} \dot{x}}{F . x^m \dot{x}} = \frac{m+1}{m+2} x, \text{ ou } GA : PA :: m+1 : m+2 ;$$

&c

$$\& u = \frac{F. x^{m+2} \cdot x}{F. x^{m+1} \cdot x} = \frac{m+2}{m+3} x, \text{ ou } OA : PA :: m+2 :$$

$m+3$. Le centre d'oscillation d'une sphere a été déterminé, Fig. 239.

dans l'article 536. par la fluente de $2ny^2y(a^2 - yy)$ (en supposant, dans la figure 239. le rayon $GE = a$, $GN = PM = y$, $OG = z$ & n à 1, comme la circonférence du cercle est à son rayon) laquelle est $2ny^3 \left(\frac{aa}{3} - \frac{yy}{5} \right)$, & cette fluente de

vient égale à $\frac{4n a^5}{15}$, lorsque $PM = GE$, ou $y = a$, laquelle

étant divisée par $\frac{2n}{3} \cdot a^3 \cdot z$ (solide compris sous la sphere, multipliée par la distance de son centre de gravité à l'axe d'oscillation) donne $\frac{2}{5} \cdot \frac{aa}{z} = u$. Le centre de percussion est dans une

droite perpendiculaire à AO en O . On a donné, dans les articles 511, 526, 533, 544, 551, &c. plusieurs principes, concernant le centre de gravité & son mouvement, lesquels sont en usage dans la résolution des Problèmes. Le mouvement d'un fluide, qui sort d'un vaisseau cylindrique, a été examiné dans les articles 537, 540, 541, &c. & l'on a donné, dans l'article 544. un exemple de la Méthode par laquelle le principe de l'égalité d'élévation, & de chute du centre de gravité, est appliqué à cette recherche. (*Comment. Petropol. Tom. II.*) Mais la même théorie a été depuis beaucoup plus étendue, par ce sçavant Auteur, & éclaircie par différentes expériences, dans un Traité particulier, intitulé, *Hydrodynamica*.

907. Dans toutes les machines, on trouve la proportion de la force au poids, lorsqu'ils se balancent mutuellement, en supposant la machine en mouvement, & réduisant leurs vitesses aux directions respectives, par lesquelles la force & le poids agissent; car, la raison inverse, de ces vitesses, est celle de la force au poids, selon le principe général des mécaniques. Mais il est bon de déterminer également la proportion que la force doit avoir avec le poids, afin que la force l'emportant sur le poids, & la machine étant en mouvement, elle puisse produire le plus grand effet dans un tems donné. Lorsque la force prévaut, le poids se meut d'abord d'un mouvement accéléré, & lorsque la vitesse,

de la force, est invariable, son action sur le poids diminue, pendant que la vitesse du poids augmente. Ainsi l'action d'un courant d'eau ou d'air sur une roue doit s'estimer par l'excès de la vitesse du fluide sur celle de la partie de la machine qu'il frappe, ou par leur vitesse relative, uniquement. Le mouvement de la machine n'est plus accéléré, dès que cette vitesse relative est tellement diminuée, que l'action de la puissance devient égale à la résistance de la machine produite par la pesanteur du poids qu'elle élève, & par le frottement; car, lorsque ces deux choses se balancent mutuellement, la machine s'avance avec le mouvement uniforme qu'elle a acquis. Soit a la vitesse du courant, u celle de la partie de la machine qu'il frappe, lorsque le mouvement de la machine est uniforme, $a - u$ représentera leur vitesse relative. Soit A le poids qui balancerait la force du courant, lorsque sa vitesse est a , & p le poids qui balancerait, lorsque sa vitesse est seulement $a - u$; nous aurons $p : A :: (a - u)^2 : a^2$;

ou $p = \frac{A(a - u)^2}{a^2}$, & p représentera l'action du courant sur

la roue. Si l'on fait abstraction du frottement, & que l'on n'ait égard qu'à la quantité du poids, supposons-la $= qA$ (ou qu'elle soit à A , comme q à 1); puisque le mouvement de la machine

est supposé uniforme, $p = qA = \frac{A(a - u)^2}{a^2}$, ou $q = \frac{(a - u)^2}{a^2}$. Le *momentum* de ce poids est $qAu = \frac{Au(a - u)^2}{a^2}$;

lequel est un *maximum*, lorsque la Fluxion de $u \frac{(a - u)^2}{a^2}$ dispa-

roît, c'est-à-dire, lorsque $\dot{u}(a - u)^2 - 2u\dot{u}(a - u) = 0$, ou $a - 3u = 0$. Donc, en ce cas, la machine aura le plus grand

effet si $u = \frac{2}{3}a$, ou le poids $qA = \frac{A(a - u)^2}{a^2} = \frac{4}{9}A$; c'est-

à-dire, si le poids, que la machine doit élever, est moindre que celui qui seroit en équilibre avec la puissance, en raison de 4 à

9; & le *momentum* du poids est $\frac{4}{27} \frac{Aa}{27}$.

908. Si nous voulons, de même, considérer le frottement qui vient du mouvement du poids, soit 1 à n , comme le poids est à la résistance de la machine qui résulteroit de ce frottement, si le mouvement de la machine avoit été tel que sa partie poussée

par le courant fût mûe avec la vitesse donnée a ; alors, supposant que le frottement est toujours en raison composée du poids & de la vitesse, la résistance de la machine provenant de la même cause, lorsqu'une partie de la roue, poussée par le courant, se meut avec la vitesse u fera $\frac{n q A u}{a}$. Supposons donc $p = q A$

+ $\frac{n q A u}{a} = \frac{A (a - u)^2}{a a}$, on aura $q A = \frac{A}{a} \cdot \frac{(a - u)^2}{a + n u}$, &

le *momentum* du poids $q A u = \frac{A u}{u} \cdot \frac{(a - u)^2}{a + n u}$; dont la Flu-

xion est supposée disparaître, nous trouverons $a a - 3 a u$

- $2 n u u = 0$, ou $u = \frac{2 a}{3 + \sqrt{9 + 8 n}}$, & le poids $q A = 4 A$.

$\frac{1 + \sqrt{9 + 8 n}}{(3 + \sqrt{9 + 8 n})^2}$; c'est-à-dire, que la machine aura son plus

grand effet, (selon cette supposition) lorsque $u : a :: 2 : 3$

+ $\sqrt{9 + 8 n}$, & le poids est à celui qui balancerait la puissance

comme $2 + 2 \sqrt{9 + 8 n}$ est à $9 + 4 n + 3 \sqrt{9 + 8 n}$. Par exem-

ple, si $n = \frac{7}{8}$, on aura $u = \frac{2 a}{7}$, & $q A : A :: 20 : 49$; par con-

séquent, quoique la vitesse u soit moindre que dans le premier

cas, en raison de 6 à 7, (& par conséquent l'action de la puis-

sance plus grande,) cependant le poids, qui est élevé, est moins

en raison de 45 à 49, & l'effet de la machine est moindre

en raison de 270 à 343. Si n est fort petit, par rapport à 1, on

aura $u : a :: 1 : 3 + \frac{2 n}{3}$, & $q A : A :: 4 + \frac{4 n}{3} : 9 + 4 n$ à

fort peu près. Mais si nous voulons, de même, avoir égard au

frottement qui vient des parties de la machine, aussi bien qu'à

celui qui vient de l'élévation du poids, le calcul fera un peu

différent. Que le frottement soit égal à $m A$, lorsque la machine

se meut sans aucune charge, de manière que la vitesse de la partie

poussée, par le courant, soit égale à a ; le frottement sera égal à

$\frac{m A u}{a}$, lorsque cette vitesse est u ; ou l'on suppose m invariable,

parce que la machine reste la même. Lorsque le mouvement de

la machine est uniforme, $p = q A + \frac{n q A u}{a} = \frac{m A u}{a}$

$= \frac{A(a-u)^2}{a^2}$, & supposant que le *momentum* de qA est un *maximum*, on trouvera u par la résolution de l'équation $u^3 + \left(\frac{3}{2n} - 1 - \frac{m}{2}\right) au^2 - \left(\frac{2+m}{n}\right) aau + \frac{a^3}{2n}$. Par exemple, si $n = \frac{1}{10}$, & $m = \frac{1}{10}$, u approche de $\frac{3a}{10}$, qA est environ $\frac{39A}{103}$, l'effet de la machine environ $\frac{1}{5}$ de Aa , ou $\frac{3}{4}$ de ce qu'il auroit été s'il n'y avoit pas eu de frottement, & si u avoit été égale à $\frac{1}{3}a$.

Fig. 336.

909. Supposons que le poids donné P , descendant par sa pesanteur dans une ligne verticale, élève un poids donné W par la ligne PMW (qui passe sur la poulie M) le long du plan incliné BD , dont la hauteur BA est donnée, & qu'on demande la position du plan BD , le long duquel W sera élevé, dans le moindre tems, depuis la ligne horizontale AD jusques en B . Soit $AB = a$, $BD = x$, t = au tems que W emploie à parcourir DB : la force, qui accélère le mouvement de W , est $P - \frac{aW}{x}$, t est comme $\frac{x^2}{P - \frac{aW}{x}}$, & si l'on suppose que la

Fluxion de cette quantité disparoît, on trouvera $x = \frac{2aW}{P}$,

ou $P = \frac{2aW}{x}$; par conséquent le plan requis BD est celui sur lequel un poids, égal à $2W$, seroit soutenu par P ; ou si BC est le plan sur lequel W seroit soutenu par P , on aura $BD = 2BC$. Mais si la position du plan BD est donnée, & que W étant supposé variable, on demande la raison de W à P , lorsque le plus grand *momentum* est produit en W le long du plan donné BD ; en ce cas, W doit être à P , comme BD à $BA + \sqrt{BD + BA} \times \sqrt{BA}$.

Fig. 337.

910. Le rayon CA , & l'angle ACB étant donnés, soit E un point sur l'arc AB , EM le sinus de l'angle ECA , EN celui de ECB , n un nombre positif, & qu'il soit requis de déterminer le point E , lorsque $EM \cdot EN$ est un *maximum*. Sur AC prolongée au-delà de C , prenez $CD : CA :: n - 1 : n + 1$; menez DG parallèle à CB , rencontrant le cercle AB en G ; si CE divise également l'angle ACG , elle rencontrera le cercle

au point requis E. Car, que ER, parallele à CB, rencontre CA en R, CR = x , ER = y ; lorsque $y^n x$ est un *maximum* (ou lorsque sa Fluxion dispaçoit) $\frac{n \dot{y}}{y} + \frac{\dot{x}}{x} = 0$, par l'article 728.

ou $n x = \frac{-y \dot{x}}{\dot{y}}$. Que la tangente en E rencontre CA en T;

CB en Z, & DG en Q; & que AP, perpendiculaire à CE, rencontre CB en K, & le cercle encore en H; on aura RT

$= \frac{-y \dot{x}}{\dot{y}} = n x$, ou RT : CR :: n : 1 :: ET : EZ :: AP :

PK :: PH : PK, par conséquent HK : KA :: $n - 1$: $n + 1$:: CD : CA, & DH est parallele à CB. Donc H se confond avec G, & l'arc GA est divisé également en E, lorsque ERⁿ.CR est un *maximum*, ou (parce que ER est à ERM, & CR à EN en même raison invariable du sinus total, au sinus de l'angle donné ACB) lorsque EMⁿ.x EN est un *maximum*.

911. Soit un fluide qui, se mouvant avec la vitesse & la direction AC, frappe le plan CE, & que ce plan se meuve, parallelement à lui-même, dans la direction CB. Prenez CD : CA :: 1 : 3, menez CB parallele à CB, qui rencontre le cercle AB en G; & si le plan CE divise également l'angle ACG, l'effet du fluide sur CE fera le plus grand, au commencement du mouvement. Mais si le plan CE a déjà acquis un mouvement dans la direction CB, que sa vitesse, dans cette direction, soit à la vitesse du courant, comme Aa à AC, & que Aa soit parallele à CB; qu'un cercle décrit du centre C, avec la distance Ca, rencontre DG en g; l'effet du courant, sur le plan CE, fera le plus grand dans ce cas, lorsque le plan divise également l'angle aCg. Car, soient AP & ap perpendiculaires à CE en P, & p & ah perpendiculaire à AP en h; le mouvement des particules du fluide, dans la direction perpendiculaire à CE, sera représenté par AP, leur mouvement dans la direction parallele au plan CE par CP, le mouvement du plan, dans la premiere direction, par Ah, & dans la seconde par ah. L'action du fluide, sur le plan, dépend uniquement de leur vitesse relative, c'est-à-dire, de la différence des mouvemens AP & Ah, (qui est égale à hP ou ap) & de la somme, ou de la différence des mouvemens PC & ha, qui est égale à pC. D'où il suit que l'action du courant, sur

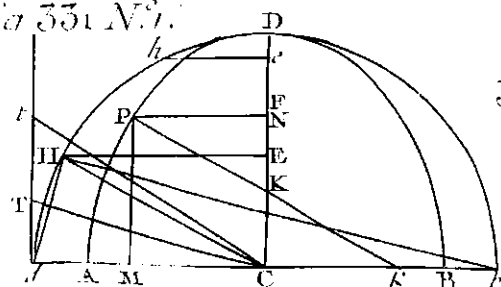
le plan CE, est la même, en ce cas, qu'elle seroit si le plan étant en repos, le courant le frappoit avec la direction & la force aC . Que cette force aC soit décomposée en ap , perpendiculaire au plan CE, & pC parallèle au même; puisque la dernière n'a point d'action sur le plan, soit la force ap décomposée en celle ak parallèle à CB, & pk perpendiculaire à CB; puisque la force pk n'a point d'action pour pousser le plan CE dans la direction CB; ak mesurera la force avec laquelle chaque particule du fluide pousse CE dans la direction CB; & le nombre des particules, qui tombent sur le plan CE dans le même tems, étant comme ap , l'effet du courant, pour mouvoir le plan CE dans la direction CB, sera mesurée par $ak \times ap = (Em \text{ \& } EN \text{ étant perpendiculaire à } Ca, \text{ \& } CB \text{ en } m \text{ \& } N, \text{ \& par conséquent } ak :$

$ap :: EN : CE) \frac{ap^2 \cdot EN}{CE} = Em^2 \cdot EN \cdot \frac{Ca^2}{CE^3}$, qui est un *maximum*, lorsque CE divise également l'angle aCg , par le dernier article; parce que CE & Ca sont supposées données, $n=2$, & $CD : CA :: n-1 : n+1 :: 1 : 3$. Si $Aa=0$, g tombe sur G, & le courant à son plus grand effet, lorsque CE divise également l'angle ACG.

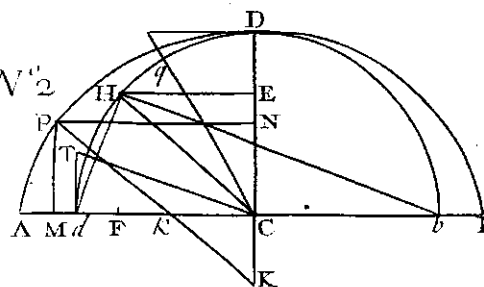
Fig. 338.

912. Soit CV perpendiculaire à Aa en V, & que CE prolongée rencontre Aa en t; prenez $VL = VC \times \sqrt{2}$, $Vf = \frac{3Va}{2}$; joignez Lf, & Vt, tangente de l'angle VCE, (VC étant le rayon) sera égale à Lf + Vf, lorsque le plan CE est dans la position la plus avantageuse, CA vitesse & direction du courant, & Aa vitesse & direction du plan CE étant données. Car, soit pq perpendiculaire à CV en q qui rencontre Ca en u, que aC & VC prolongées rencontrent Dg en z & d; puisque $aC = 3Cu$, $at = 3pu =$ (parce que $ag = 2ap$) $\frac{3gz}{2}$, $= \frac{3gd + 3dz}{2} = \frac{3gd}{2} + \frac{Va}{2} =$ (parce que $gd^2 = Cg^2 - Cd^2 = Ca^2 - \frac{CV^2}{9} = \frac{8}{9}CV + Va^2 = \frac{4}{9}(2CV^2 + \frac{9}{4}Va^2)$) $= \frac{4}{9}(VL^2 + Vf^2) = \frac{4}{9}Lf^2$, & $\frac{3gd}{2} = Lf$ $Lf + \frac{Va}{2}$, & $Vt = at + Va = Lf + Vf$. Si $CV = a$, $Va = c$, on aura $Vt = \sqrt{2aa + \frac{9cc}{4}} + \frac{3c}{2}$. Le signe négat-

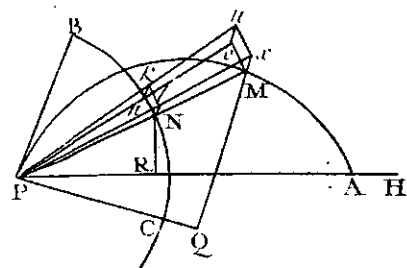
Fig 331 N^o 1



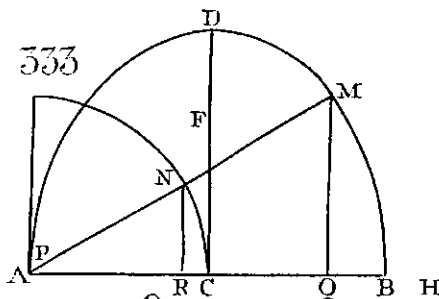
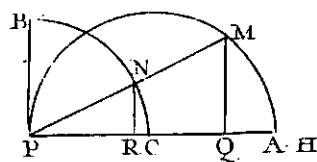
331 N^o 2



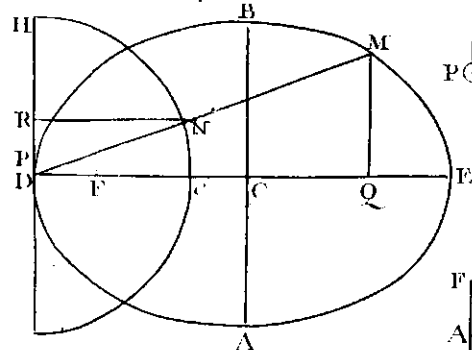
332 N₁



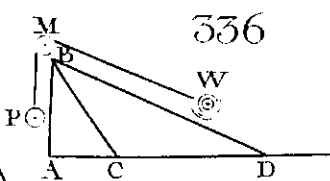
332 N₂



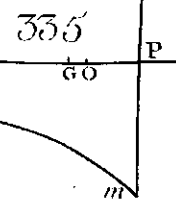
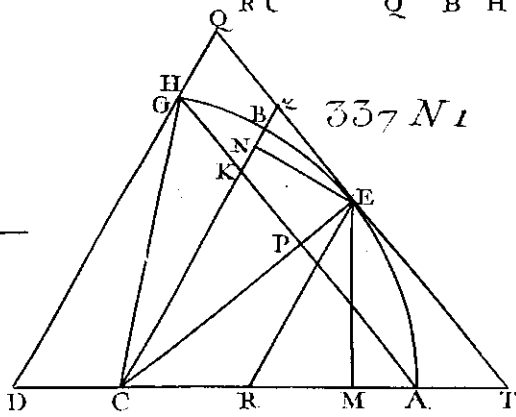
334



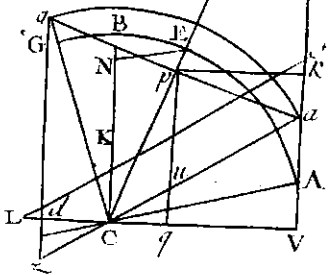
336



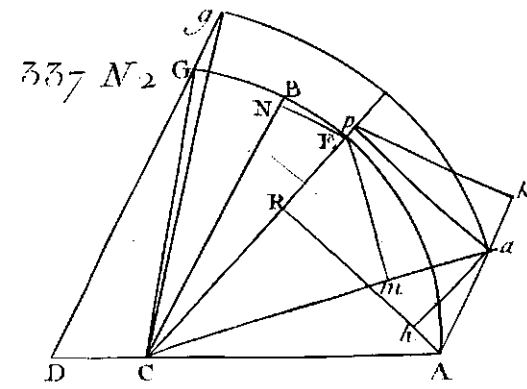
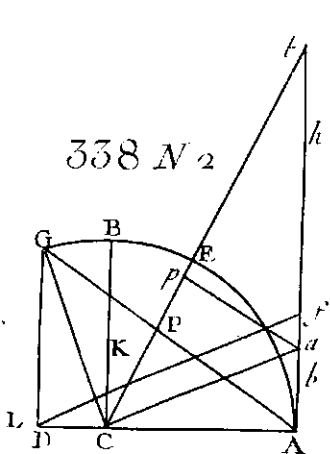
337 N₁



338 N₁



338 N₂



il a lieu lorsque $\angle C B$ est plus grand qu'un angle droit.

913. Lorsque l'angle $\angle C B$ est droit, A se confond avec D , $D G$ est perpendiculaire à $A D$, & $A t = L f + A f$ Fig. 333.

$= \sqrt{2 a a + \frac{9 c c}{4} + \frac{3 c}{2}}$. Si $A a = c = 0$, alors $A t : A C :: \sqrt{2} : 1$, ou $A P$, sinus de $\angle C E$, est au sinus total $A C$, comme $A G$ est à $2 C A$, ou comme $\sqrt{A D}$, est à $\sqrt{2 C A}$, c'est-à-dire, comme $\sqrt{2}$ à $\sqrt{3}$. Donc le courant, au commencement du mouvement, aura le plus grand effet sur le plan $C E$, si l'angle $\angle C E$ est de $54^{\circ}. 44'$, & c'est le cas que plusieurs Auteurs ont examiné : mais si le plan $C E$ est déjà en mouvement dans la direction $C B$, le courant aura le plus grand effet sur ce plan, si l'angle $\angle C E$ est plus grand. Par exemple, si la vitesse du plan $C E$, dans la direction $C B$, est un tiers de la vitesse du courant, ou $c = \frac{a}{3}$, alors $A t = \sqrt{2 a a + \frac{a a}{4} + \frac{a}{2}} = 2 a$, ou la tangente de l'angle $\angle C E$ doit être double du rayon, c'est-à-dire, $\angle C E = 63^{\circ}. 26'$. Si $c : a :: \sqrt{8} : \sqrt{9}$, alors $A t : A c :: 2 + \sqrt{2} : 1$ & $\angle C E$ doit être de $73^{\circ}. 40'$. Si $c = a$, $\angle C E = 74^{\circ}. 19'$.

914. Ainsi les voiles d'un Moulin à vent ordinaire, doivent être tellement situées, que le vent puisse les fraper sous un angle plus grand que celui de $54^{\circ}. 44'$; car ce n'est-là l'angle le plus avantageux qu'au commencement du mouvement; & lorsqu'une partie de la machine a acquis une vitesse c , l'effet du vent, sur cette partie, doit être le plus grand, lorsque la tangente de l'angle, sous lequel le vent frappe, est au sinus total, comme

$\sqrt{2 + \frac{9 c c}{4 a a} + \frac{3 c}{2 a}}$ est à 1. Que la droite $b h$ représente la longueur de l'une des voiles, prenez $A C$ à $A b$, comme la vitesse du vent à la vitesse du point donné b autour de l'axe du mouvement, $L A = A C \sqrt{2}$, & a étant un point sur $b h$, prenez $A f = \frac{3 A a}{2}$; si la voile est tellement construite, que le vent doit

la fraper à une distance de $A a$ de l'axe du mouvement, sous un angle, dont la tangente est toujours au sinus total, comme $L f + A f$ est à $C A$, le vent aura son plus grand effet sur la voile. Il est vrai qu'un Auteur célèbre a tiré une conclusion contraire de ses calculs, sçavoir. que l'angle, sous lequel le vent

frappe la voile, doit décroître, comme la distance de l'axe du mouvement croît; c'est-à-dire, si $c = a$, le vent doit frapper la voile sous un angle de 45° ; & que si la voile est dans un plan, il doit être incliné au vent, sous un angle d'environ 50 degrés, dans un milieu: mais s'il avoit réduit l'équation de six dimensions, par laquelle il a déterminé le *maximum*, à une équation biquadratique, nos conclusions auroient été les mêmes; & le diviseur, par lequel on peut faire cette réduction, n'est d'aucun usage pour déterminer la position la plus avantageuse de la voile, lorsque la machine est en mouvement; parce qu'il ne donne pas un *maximum*, mais un *minimum* qui répond au cas où CE se confond avec Ca, & où le courant n'a point d'effet sur le plan CE. Supposons $Aa = AC$, ou $c = a$; si l'angle ACE est de 45° , CE se confondra avec Ca, les vitesses du plan CE & du courant estimées dans la direction perpendiculaire à CE seront égales; en sorte que le courant, dans ce cas, n'aura point d'effet sur le plan CE, pour conserver, ou accélérer son mouvement; & l'angle ACE doit être augmenté, afin que la vitesse du courant, dans la direction ap, (selon laquelle il agit sur le plan) puisse être plus grande que la vitesse du plan dans la même direction. On voit, de même, que si Aa est égal à 2 AC & ACE de $54^\circ. 44'$, le courant n'aura point d'action sur le plan CE, & qu'il faudra augmenter l'angle ACE.

Fig. 339.

915. Lorsque la machine est d'une telle nature, que tout le fluide, ou la même quantité du fluide, tombe toujours sur le plan CE, dans ses différentes positions, la force, par laquelle il pousse CE, dans la direction CB, est comme $ak = Em. EN. \frac{Ca}{CE^2}$, qui est un *maximum*, (Ca & CE étant données) lorsque CE divise également l'angle aCB, par l'article 910. parce que, dans ce cas, $n = 1$, $CD : CV :: n - 1 : n + 1 :: 0 : 2$, c'est-à-dire, que CD disparoît, & DG se confond avec CB. En ce cas, si AC & Aa, vitesses du courant & du plan, sont données, avec CB direction du mouvement du plan, mais que l'angle ACB soit variable, & que Aa soit plus grande que $\frac{1}{2} AC$, l'action du fluide sur le plan ne sera pas la plus grande, lorsque AC est perpendiculaire à CE, & CE à CB; mais lorsque ACB étant un angle obtus, le sinus de ACV est au sinus total, comme AC est à 2 Aa, & que le plan CE est perpendiculaire à AC. Car, soit $Cg = Ca$, aq perpendiculaire à CB

en

en q , on aura $ak = \frac{1}{2} gq$. Soit $CA = a$, $Aa = c$, $AV = x$, on aura $2ak = Cg \mp Cq = Ca \mp aV = \sqrt{aa + cc - 2cx} + x - C$, & lorsque la Fluxion de cette quantité disparoît,

$$\frac{-cx}{\sqrt{aa + cc - 2cx}} + \dot{x} = 0, aa + cc - 2cx = cc, aa$$

$= 2cx$, ou $x : a :: a : 2c$; & il est aisé de voir, par la construction, qu'en ce cas, ACE doit être un angle droit. Par exemple, si $c = a$, $x = \frac{1}{2} a$, $ACV = 30$ degrés, $ACB = 120$ degrés, $ACE = 90$ degrés, & $ECB = 30$ degrés.

916. Supposons maintenant que AC représente la direction & la vitesse du vent, CB la direction du mouvement d'un vaisseau, Aa , parallèle à CB , la vitesse du vaisseau, CE la situation de la voile, & faisons abstraction de la dérive, ou supposons que l'obliquité du vent, ou de la voile, n'occasionnent à la route CB aucun écart de cette direction CB . Pour déterminer la situation la plus avantageuse de la voile CE , (lorsque CA , CB & Aa sont données) afin que le vent agisse avec la plus grande force, pour pousser le vaisseau dans la direction donnée CB , prolongez AC en sorte que $AD : AC :: 4 : 3$. faites DG parallèle à CB , & qu'un cercle aeg , décrit du centre C avec la distance Ca , rencontre DG en g ; la voile CE doit diviser également l'angle aCg , par l'article 911. ou que CV soit perpendiculaire à Aa en A , $LV = VC \cdot \sqrt{2}$, $Vf = \frac{1}{2} Va$, $Vt = Lf + Vf$, & que CE prolongée passe par t . Lorsqu'on ne fait pas attention à la vitesse Aa du vaisseau, ou que le mouvement commence, CE doit diviser également l'angle ACG ; ce qui est le cas qui a été résolu, par M^{rs} Fatio & Huyguens, par une équation biquadratique, & qui a été examiné plus à fonds, par M. Bernoulli, *Manœuvre des Vaisseaux*, Chap. V. Mais, en certains cas, la raison de Aa à AC n'est pas à négliger; & supposant AC perpendiculaire à CB , si (par exemple) $Aa = \frac{1}{3} AC$, l'angle ACE doit surpasser $\frac{1}{2} ACG (= 54^{\circ}. 44')$ en ce cas) d'environ $9\frac{2}{3}$ degrés, si l'on veut que le vent pousse le Navire, avec la plus grande force, dans la direction CB .

917. La force, par laquelle le vent pousse le Navire dans la direction CB , est toujours mesurée par $ak.ap$; & lorsque cette force devient égale à la résistance de l'eau, le mouvement du Navire devient uniforme. Que CK représente la vitesse uniforme que le vaisseau auroit acquise, par le même vent, dans sa direc-

tion AC, si la voile avoit été perpendiculaire à AC, la force qui, dans ce cas, soutient le mouvement du vaisseau, & balance la résistance, sera mesurée par KB^2 . Donc (la résistance de l'eau étant comme le quarré de la vitesse du vaisseau) $CK^2 : Aa^2 :: KB^2 : ap.a k =$ (en supposant que Aa , parallele à CB , rencontre CE en t) $at^2 \cdot \frac{EN^3}{CE^3}$; par conséquent $Aa : at :: CK \sqrt{\frac{EN^3}{CE^3}}$:

KB . Soit $CA = a$, $Aa = x$, $EN = y$, $AV = p$, $CK : KB :: 1 : m$; on aura $Aa : at :: y \sqrt{y} : ma \sqrt{a}$; & parce que $At = Vt \mp AV = \sqrt{aa - pp} \times \frac{\sqrt{aa - yy}}{y} \mp p$; $Aa = x = \frac{\sqrt{aa - pp} \sqrt{aa - yy} \cdot y \pm py \sqrt{y}}{ma \sqrt{a} + y \sqrt{y}}$.

Supposons a , p & m constantes, lorsque x est un *maximum*, nous trouverons que $aa - 3yy - \frac{2y \sqrt{ay}}{m} \mp \frac{3py \sqrt{aa - yy}}{\sqrt{aa - pp}}$

$= 0$. C'est-là une équation pour déterminer le sinus de l'angle ECB , qui doit être compris par la voile, & par la ligne du mouvement du vaisseau, afin que la vitesse du Navire, dans cette ligne, soit la plus grande qu'il soit possible, a , p & m étant données.

918. Si AC est perpendiculaire à CB , alors $p = 0$, & $3yy + \frac{2y \sqrt{ay}}{m} = aa$. Par exemple, soit $m = 2\sqrt{2}$, c'est-à-dire, que la vitesse du vaisseau soit à celle du vent, lorsque le vaisseau se meut dans la direction du vent, & que le vent est perpendiculaire à la voile, comme 1 à $1 + 2\sqrt{2}$ (ou à fort peu près comme 1 à 3.828.) si le vaisseau fait route dans une direction perpendiculaire à celle du vent, la voile doit être inclinée, au lit du vent, par un angle de 60° . ou à la route du Navire, par un angle de 30° . Car, l'équation pour y lorsque x est un *maximum* est, dans cet exemple, $aa - 3yy - \frac{y \sqrt{ay}}{\sqrt{2}} = 0$, qui donne

$y = \frac{a}{2}$; & dans ce cas, la vitesse du vaisseau est $\frac{a \sqrt{y} \times \sqrt{aa - yy}}{ma \sqrt{a} + y \sqrt{y}} = \frac{a}{3\sqrt{3}}$. Le sinus de l'angle ECB est toujours moindre que $\frac{1}{\sqrt{3}} \times CB$.

919. L'angle ECB compris par la voile CE , & la route CB

du Navire, avec AC vitesse du vent étant donnés, la vitesse du vaisseau est la plus grande, lorsque ACE est un angle droit, c'est-à-dire, lorsque le vent est perpendiculaire à la voile, comme on le voit, & ce qui s'accorde avec l'article 917. ou a, y & m étant donnés, x devient un *maximum*, lorsque $p = y$. Suppo-

sant AC perpendiculaire à CE, $x = \frac{a \sqrt{y}}{m \sqrt{a} + y \sqrt{y}}$, & c'est

un *maximum*, lorsque y ou $p = a \sqrt[3]{\frac{m m}{4}}$; c'est-à-dire, que

de tous les cas, ou le vent est supposé perpendiculaire à la voile, vitesse du vaisseau est la plus grande, (pourvu que CK ne soit pas plus petit que $\frac{1}{2}$ CA, ou que m ne soit pas plus grand que 2) lorsque le sinus de l'angle ECB, compris par la voile & la route, est au sinus total, comme $\sqrt[3]{m m}$ est à $\sqrt[3]{4}$, & la vitesse du vaisseau est plus grande, en ce cas, que lorsque le vent souffle dans la direction de la route, & est perpendiculaire à la voile, en raison de $m + 1$ à 3 $\sqrt[3]{\frac{m m}{4}}$, ou (supposant $n = 2 - m$) de $1 - \frac{n}{3}$

à $(1 - \frac{n}{2})^{\frac{2}{3}}$. Si, par exemple, CK : CA :: 1 : 2, la vitesse dans la direction CB sera la plus grande, lorsque le sinus de ECB, ou ACV sera au sinus total, comme 1 à $\sqrt[3]{4}$; c'est-à-dire, lorsque l'angle ECB est d'environ 39°. 3', ou lorsque l'angle ACb, de l'inclinaison du vent avec la route du vaisseau, est d'environ 50°. 57'. Et la vitesse du vaisseau est, en ce cas, plus grande que lorsque le même vent souffle directement dans la route du vaisseau, & que la voile est perpendiculaire au vent, (auquel cas on regarde communément le vent comme plus favorable) en raison de $\sqrt[3]{32}$ à $\sqrt[3]{27}$, ou de $2\sqrt[3]{4}$ à 3, & en inclinant la voile CE au vent, enforte qu'on augmente l'angle BCE, la vitesse du vaisseau, dans la droite sera toujours plus grande. On peut supposer plusieurs autres cas, par l'article 916. ou le vent de côté augmentera plus le mouvement du vaisseau que le vent arriere. Par exemple, si la vitesse du vaisseau, dans la direction CB, est à celle du vent, comme 1 à 3, & que l'angle ACB soit seulement de 109°. 28', la force, par laquelle le vent poussera le Navire dans la route CB, sera, dans ce cas, plus grande que par le vent arriere, ou l'angle ACB est de 180°. en raison de $\sqrt[3]{32}$ à $\sqrt[3]{27}$, la voile étant supposée, dans les deux cas, avoir la posi-

Fig. 341.

tion la plus avantageuse, qui a été déterminée dans l'article 916.
 920. Une ligne donnée AC étant divisée en B , le rectangle ABC est un *maximum* lorsque $AB = BC$, par ce qui est démontré dans les élémens de Géométrie. De-là il suit, que si une droite donnée AG est divisée en un nombre donné de parties AB, BC, CD, DE, EF, FG , le produit des parties $AB. BC. CD. DE, \&c.$ fera un *maximum*, lorsqu'elles seront toutes égales entre-elles; parce que si BD , somme de deux parties contigues, est divisée également en C , & inégalement en c , $BC. CD$ sera plus grand que $Bc. cD$, & $AB. BC. CD. DE, \&c.$ sera plus grand que $AB. Bc. cD. DE, \&c.$ Si une droite donnée AG est divisée en C , de sorte que $AC^n. CG^m$ soit un *maximum*, ou aura $AC : CG :: n : m$; car, si l'on suppose $AG = a$,

$AC = x, x^n (a - x)^m = y$, on aura $\frac{\dot{y}}{y} = \frac{n \dot{x}}{x} - \frac{m \dot{x}}{a - x}$, &

si $\dot{y} = 0$, $\frac{n}{x} = \frac{m}{a - x}$, c'est-à-dire, $AC : CG :: n : m$. On peut tirer la même proposition de premier cas, lorsque n & m sont des nombres entiers; par exemple, $AB. BG^5$ est un *maximum*, lorsque $AB : BG :: 1 : 5$; parce que si l'on divise DG en 5 parties égales, $BC, CD, \&c.$ on aura $AB. BG^5 = 5.5.5.5.5. AB. BC. CD. DE. EF. FG$, qui est un *maximum*, lorsque $AB = BC = CD = DE = EF = FG$. Si l'on divise AG en trois parties AB, BD & DG , alors $AB. BD^n. DG^m$ sera un *maximum* lorsque AB, BD & DG sont les unes aux autres comme les nombres 1, n & m respectivement; parce que, en quelque endroit que l'on suppose le point B , $BD^n. DG^m$ ne peut pas être un *maximum*, (& par conséquent $AB. BD^n. DG^m$ n'est pas un *maximum*) à moins que $BD : DG :: n : m$; & en quelque endroit que l'on suppose le point D , $AB. BD^n$ ne peut pas être un *maximum*, à moins que $AB : BD :: 1 : n$. La continuation de ces Théorèmes est facile, & cette brève Méthode, de résoudre plusieurs questions de *maximis* & *minimis*, qui ne peuvent pas se-réduire aisément aux regles ordinaires, se trouve dans une Lettre à Martin Folkes, Ecuyer, *Phil. Transf.* N. 408. l'article suivant en donne un autre exemple utile.

Fig. 342.

921. Le rayon AC & l'arc AF étant donnés, soit AF divisé en trois parties, AE, EB & BF ; que EM, EN & BR soient les sinus des arcs AE, EB & BF ; si $EM^n. EN. BR^m$ est un

maximum, les tangentes des arcs AE , EB & BF seront entre-elles comme les nombres n , 1 & M . Cela suit de l'article 910. parce que, en quelque lieu que l'on seppose le point B sur l'arc FE , $EM^n \cdot EN$, n'est pas un *maximum*, (article 910.) à moins que la tangente de l'arc AE ne soit à celle de EB , comme n est à 1 ; par conséquent l'arc AB doit être divisé de maniere, que $BR^m \cdot EN \cdot EM^n$ puisse être un *maximum*. De même, en quelque endroit que l'on prenne le point E sur l'arc AB , $EN \cdot BR^m$ ne peut pas être un *maximum*, à moins que la tangente de EB ne soit à celle de BF , comme 1 est à m , & l'arc FE doit être divisé de cette maniere, afin que $EM^n \cdot EN \cdot BR^m$ puisse être un *maximum*. Donc, si $EM^n \cdot EN \cdot BR^m$ est un *maximum*, la tangente de AE doit être à la tangente de EB , comme n est à 1 , & la tangente de EB à celle de EF , comme 1 est à m ; c'est-à-dire, que l'arc FA doit être divisé de telle maniere, en B & E , que les tangentes de AE , EB & BF soient entre-elles comme les nombres n , 1 & m . Si $n=m$, on aura $AE=BF$. la continuation de ces Théorèmes est, de même, facile. Si un arc donné est divisé en un nombre donné de parties, dont les sinus soient représentés par a , b , c , d , e , &c. & que $a^m \cdot b^n \cdot c^r \cdot d^s \cdot \&c.$ soit un *maximum*, les tangentes des parties respectives seront entre-elles, comme m , n , r , s , &c. & (parce que le sinus d'un arc est au rayon, comme la tangente est à la sécante du même arc,) le produit des mêmes puissances des sécantes respectives de ces arcs sera un *maximum*.

922. Pour donner un exemple de ce Théorème, la force & la direction du vent étant données, qu'il soit requis de trouver la route la plus avantageuse du Navire, & la position de la voile, afin que le Navire puisse suivre une direction donnée, ou s'éloigner d'une côte, ou d'une ligne droite donnée, aussi vite qu'il est possible. Que AC représente la force & la direction du vent, CF la ligne d'où le Navire doit s'éloigner le plus vite qu'il est possible, CB la route du Navire, & CE la position de la voile. Soit AQ parallèle à CB , & PQ perpendiculaire à AQ en Q . La force par laquelle le vent pousse le Navire, dans la direction CB au commencement du mouvement, sera comme $AP \cdot AQ = EM^2 \cdot \frac{EN}{CE}$; & la vitesse du vaisseau (en la supposant incomparablement plus petite que celle du vent) sera comme $EM \cdot \sqrt{EN}$; laquelle étant réduite à la direction BR , perpendiculaire

à CF, est comme EM.BR. $\sqrt{EN}$; & cette dernière vitesse est un *maximum*, (par le dernier article) lorsque les tangentes des arcs AE, EB & BF sont comme les nombres 1, $\frac{1}{2}$, & 1 ou 2, 1 & 2. Soit le rayon CE = a , la tangente de AF représentée par b , celle de AE ou BF par t , & celle de AB ou FE par T . Puisque les arcs AB + BF = AF, on voit aisément que $t = a \left(\frac{ab - aT}{aa + bT} \right)$; & de même, puisque BF + BE = FE, la tangente de BE $\left(= \frac{t}{2} \right) = a \left(\frac{aT - at}{aa + Tt} \right)$; d'où suit $T = \frac{3aat}{2aa - tt}$; par conséquent $tt - 4btt - 5aat + 2baa = 0$; & b étant donnée, on trouvera t & T , par la résolution de cette équation cubique.

923. Si FCA est un angle droit, b est infinie, & $2tt = aa$, ou $t : a :: 1 : \sqrt{2}$, & $T : a :: \sqrt{2} : 1$; c'est-à-dire: ACB = FCE = $54^{\circ}. 44'$; par conséquent, si l'on peut négliger la vitesse du vaisseau, comme incomparablement plus petite que celle du vent, la route doit former un angle de $54^{\circ}. 44'$, & la voile un angle de $35^{\circ}. 16'$. avec la direction du vent, afin que le Vaisseau gagne sur le vent autant qu'il est possible; & c'est le cas résolu par M. Bernoulli, *Manœuvre des Vaisseaux*, p. 50, &c. Si la route CB, & la position de la voile CE sont requise, afin que le vaisseau s'écarte de la ligne AC aussi vite qu'il est possible, il faudra supposer que ACF est une ligne droite continue, ou $b = 0$, auquel cas, $tt = 5aa$, ou $t : a :: \sqrt{5} : 1$; par conséquent l'angle ACE, doit être de $65^{\circ}. 54'$. & ACB de $114^{\circ}. 6'$. Si l'angle ACE est donné, la tangente de ECB doit être à celle de ECF, comme 2 à 1; & ECB se détermine par une construction semblable à celle de l'article 910. Nous avons toujours supposé que la voile étoit un plan, & nous avons fait abstraction de la dérive du Vaisseau; mais nous ne pousserons pas plus loin, quant à présent, cette théorie. M. Renau a publié un Traité ingénieux, sur cette matière, en 1689. mais M^{rs} Hugens & Bernoulli y ont corrigé quelques articles particuliers. On peut résoudre plusieurs autres Problèmes mécaniques, de la même manière que ceux-là ont été résolus.

924. Dans le *Livre premier, Chap. XIII.* on a fait voir de quelle manière on pouvoit réduire immédiatement plusieurs Problèmes aux équations, qui ne renferment que les premières Fluxions, quoique ces Problèmes n'ayent été résolus ordinairement que par

des équations, qui renferment les secondes, ou plus hautes Fluxions. Mais comme cette Méthode n'est pas toujours applicable, nous donnerons quelques exemples, d'une Méthode, de réduire les équations des secondes aux premières Fluxions. Supposons

$\dot{x}$ constant, & si l'équation renferme $\dot{x}$, $\dot{y}$ & $\ddot{y}$, & que x ou y manquent, (ce qui arrive le plus communément dans la résolution des Problèmes) on peut la réduire aux premières Fluxions, en introduisant une nouvelle quantité variable, & la supposant

égale à $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, ou $\frac{\dot{x}}{\dot{y}}$. Soit, par exemple, $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \frac{y \ddot{y}}{n}$; faisons

$\dot{y} = z \dot{x}$, & par conséquent $\ddot{y} = \dot{z} \dot{x}$, nous aurons $n \dot{x}^2 (1 + z z) = y \dot{z} \dot{x}$, ou $n \dot{x} (1 + z z) (= n \dot{y} \times \frac{1 + z z}{z}) = y \dot{z}$. Donc

$\frac{z n \dot{y}}{y} = \frac{z z \dot{z}}{1 + z z}$, & (par l'article 740.) $y^n = A. (1 + z z)$

ou $z z = \frac{y^{2n}}{A} - 1 = \frac{\dot{y}^2}{\dot{x}^2}$; par conséquent $\dot{x} = \frac{\dot{y} \sqrt{A}}{\sqrt{y^{2n} - A}}$,

ou A marque une quantité invariable.

925. Que le point T se meuve dans la droite Aa, & le point Fig. 343.
M dans courbe FM, enforte que la vitesse du point T soit à celle du point M en raison constante de n à 1, & que le mouvement de M soit toujours dans la direction MT ou TM; on demande quelle est la courbe FM. Soit AP = x , PM = y , FM

= s , AT = t ; on aura $n \dot{s} = \dot{t}$ = (parce que $t = x - \frac{y \dot{x}}{\dot{y}}$, ou à

$\frac{y \dot{x}}{\dot{y}} - x$, & que $\dot{x}$ est supposée constante) $\frac{\pm y \ddot{y} \dot{x}}{\dot{y}^2}$. Soit $\dot{x}$

= $z \dot{y}$, on aura $\dot{z} \dot{y} + z \ddot{y} = 0$, & $n \dot{y} \sqrt{1 + z z} = \frac{\pm y \dot{y} \dot{z} \dot{x}}{z \dot{y}^2}$

= $\pm y \dot{z}$, & $\frac{n \dot{y}}{y} = \frac{\pm \dot{z}}{\sqrt{1 + z z}}$. Donc $A y^n = \sqrt{1 + z z} \pm z$,

& $A A y^{2n} \mp 2 A z y^n = 1$, ou $2 z = \frac{z \dot{x}}{\dot{y}} = \frac{\mp 1}{A y^n} \pm A y^n$;

par conséquent $2\dot{x} = \frac{\overline{+}\dot{y}}{A y^n} \pm A y^n \dot{y}$, & $2x = \frac{\overline{+}1}{(1-n) A y^{n-1}}$

$\frac{\overline{+} A y^{n+1}}{n+1} \pm K$, ou K marque une quantité invariable. Si

$n = \frac{1}{2}$, $x = \frac{\overline{+}\sqrt{y}}{A} \pm \frac{A y \sqrt{y}}{3} \pm K$, & la courbe est une

Fig. 344.

parabole du troisième ordre des lignes. Si $n = 1$, la courbe se construit par les logarithmes, ou par l'hyperbole équilatère. Soit NDN une telle hyperbole décrite entre les asymptotes Ca & Cb ; D un point donné dans l'hyperbole, joignez CD , que NLM , perpendiculaire à l'asymptote Ca en L , rencontre CD en K , & que $LM \times 2 FD$ soit toujours égal à l'aire DNK ; le point M sera toujours un point de la courbe.

926. Une équation, qui renferme les secondes Fluxions, peut quelquefois se réduire aux premières Fluxions, par les règles ordinaires de la Méthode inverse, lesquelles ont été données dans le Chapitre II. & afin que la solution puisse être assez générale, lorsqu'une Fluxion est supposée constante, on doit ajouter à l'équation une quantité qui en soit composée, ou de ses puissances, & de quantités invariables. Par exemple, qu'il soit requis de trouver la nature de la ligne où la courbure est toujours comme l'ordonnée, ce qui est une figure par laquelle on résout plusieurs Problèmes de différente espèce. Que le rayon de la cour-

bure soit représenté par R ; puisque $R = \frac{\dot{y} \ddot{s}^2}{\dot{s} \ddot{x} - \dot{x} \ddot{s}}$, suppo-

sant $\dot{s}$ constant, on aura $R = \frac{\dot{s} \dot{y}}{\ddot{x}}$. Dans la figure requise R

est réciproquement comme l'ordonnée y ; par conséquent, a étant une quantité invariable, nous pouvons supposer $\frac{a a}{2 y} = R$

$= \frac{\dot{y} \dot{s}}{\ddot{x}}$, ou $2 y \dot{y} \dot{s} = a a \ddot{x}$, & en prenant les fluentes, $y y \dot{s}$

$= a a \dot{x} \pm K \dot{s}$, où K marque une quantité invariable, & l'on ajoute

$K \dot{s}$, parce qu'on suppose $\dot{s}$ constante. Si $K = 0$, on aura $\dot{s}^2 : \dot{x}^2 ::$

$a^4 : y^4, \dot{y}^2 : \dot{x}^2 :: a^4 - y^4 : y^4$, & par conséquent $\dot{x} = \frac{\overline{+} y y \dot{y}}{\sqrt{a^4 - y^4}}$.

927. L'Auteur célèbre, qui, le premier, a résolu ce Problème, aussi-bien que plusieurs autres Problèmes curieux, après avoir donné le détail de cette figure (qui se nomme communément la *courbe élastique*) ajoute, *ob graves causas suspicor curvæ nostræ constructionem à nullius sectionis conicæ seu quadraturæ seu rectificatione pendere. Act. Lips. 1694. p. 272.* Cependant on la peut construire par la rectification de l'hyperbole équilatère; car, si l'on prend toujours la base d'une figure égale à la perpendiculaire abaissée du centre, sur la tangente d'une telle hyperbole, & l'ordonnée égale à l'excès de la tangente terminée par cette perpendiculaire, par-dessus l'arc intercepté entre le sommet de l'hyperbole, & le point d'atouchement, cette figure sera la courbe élastique.

Soit A E Z une hyperbole équilatère, qui a son centre en S, & son sommet en A, que E soit un point dans l'hyperbole, E T tangente en E, & S P perpendiculaire abaissée du centre S, sur la tangente en P; sur S A prenez S Q = S P, & l'ordonnée Q M toujours égale à l'excès de la tangente E P sur l'arc A E de l'hyperbole; M fera un point dans la courbe élastique A M B. Car, soit S A = a, S Q (= S P) = y, Q M = x, S E = r, E P = z, & l'arc A E = s, on aura $r = \frac{a^2}{y}$, E P = z = $\sqrt{rr - yy}$ = $\frac{\sqrt{a^4 - y^4}}{y}$, $\dot{z} = \frac{-y^4 \dot{y} - a^4 \dot{y}}{yy \sqrt{a^4 - y^4}}$. Mais $s : r :: r : z :: aa :$

$$\sqrt{a^4 - y^4}, \text{ \& } \dot{r} = \frac{-a^2 \dot{y}}{yy}; \text{ par conséquent } \dot{s} = \frac{-a^4 \dot{y}}{yy \sqrt{a^4 - y^4}},$$

$$\text{ \& } \dot{x} = \dot{z} - \dot{s} = \frac{-y^4 \dot{y} - a^4 \dot{y} + a^4 \dot{y}}{yy \sqrt{a^4 - y^4}} = \frac{-y^2 \dot{y}}{\sqrt{a^4 - y^4}}, \text{ qui est}$$

l'équation de la courbe élastique commune.

928. En général, l'équation de la courbe élastique étoit $aa\dot{x} = yy\dot{s} - K\dot{s}$; par conséquent $\dot{x} = \mp y \frac{yy - K}{\sqrt{(aa - K + yy) \times (aa + K - yy)}}$,

& comparant cette Fluxion, avec celles des articles 804 & 805, on verra qu'on peut construire la courbe élastique, dans tous les cas, par la rectification des sections coniques. Soit S A la moitié du grand axe de l'hyperbole A E H, S D la moitié du second axe. Sur D S prenez S F : S A :: S A : S D, & S b = A F; décrivez le quart elliptique A R b, & E étant un point de l'hyper-

Fig. 345.

Fig. 346.

bole, SP perpendiculaire à la tangente EP en P , sur SA prenez $SQ = SP$, & que l'ordonnée QR rencontre l'ellipse en R ; ensuite prenant QM sur QR égal à $\frac{AD^2}{2SD^2} \times (EP - AE)$ $+ \frac{SD^2 - SA^2}{2SA \cdot SD} \times AR$, M fera un point de la courbe élastique : & le rayon de courbure, en chaque point M , fera égal à $\frac{AD^2}{4SQ}$, parce qu'en comparant ces Fluxions, nous supposons $aa - K = SD^2$, & $aa + K = SA^2$, ou $2aa = SD^2 + SA^2 = AD^2$, & que le rayon de courbure est supposé égal à $\frac{aa}{2y} = \frac{AD^2}{4SQ}$.

Fig. 347.

929. Que SA soit incomparablement plus petit que SD ; puisque $SD : SA :: SA : SF$, nous pouvons supposer que SF disparoît, que ARb est un quart de cercle, & que $EP - AE$ disparoît; par conséquent $QM = \frac{SD}{4SA} \cdot AR$, & $SB = -\frac{SD}{2SA} \cdot ARb =$ (si la raison de m à 1 marque celle de la circonférence au diamètre) $\frac{m}{4} \cdot SD$. & la courbe élastique, en ce cas, représentera la figure qu'une corde de musique BAC prend dans ses petites vibrations, par la converse de l'article 569. la tension de la corde étant de tous les côtés égale. Que P représente cette tension, ou un poids qui lui est équivalent, n une section de la corde perpendiculaire à sa longueur, R le rayon de courbure en chaque point M , & V la force, par laquelle le mouvement, de chaque point en M vers AC , est accéléré, pendant que la corde retourne à son état naturel; alors, par l'article 561. la tension feroit égale au poids, d'une corde de même épaisseur de la longueur R , si la pesanteur étoit égale à V ; c'est-à-dire, $P = nRV$, ou $V = \frac{P}{nR} = \frac{P}{n} \times \frac{4SQ}{AD^2} =$ (parce que SD est à AD presque en raison d'égalité) $\frac{P}{n} \times \frac{4SQ}{SD^2} = \frac{mmP}{n} \cdot \frac{SQ}{4SB^2}$. Si l'on suppose, avec le Docteur Taylor, que N représente la pesanteur de la corde,

L la longueur, g la force de la pesanteur, D la longueur d'un pendule donné, $SA = a$, SQ ou $MN = y$; puisque $N = nLg$, ou $n = \frac{N}{Lg}$, & $L = 2SB$, il suit que $V = \frac{m m P g y}{N L}$. Puisque V est comme y , distance de M à BC ; les vibrations de la corde seront semblables à celles d'un pendule; & le tems, où M décrit MN , sera au tems où le pendule D fait une demi-vibration, comme $\sqrt{\frac{y}{V}}$ est à $\sqrt{\frac{D}{g}}$, ou comme $\frac{\sqrt{LN}}{m \sqrt{P}}$ est à $\sqrt{D}$; par conséquent le nombre des vibrations faites par la corde, pendant que le pendule en fait une, s'exprime par $m \sqrt{\frac{DP}{LN}}$; c'est le Théorème du Docteur Taylor, qui sert à déterminer le nombre des vibrations faites, dans un tems donné, par une corde donnée, qui est tendue par un poids donné; ou à comparer le nombre des vibrations faites par différentes cordes en tems égaux, d'où dépend leur ton. Ainsi la pesanteur P étant la même, le nombre des vibrations est comme $\frac{1}{\sqrt{LN}}$; & lorsque les cordes sont de la même espèce, (ou que N est comme L) les vibrations sont comme $\frac{1}{L}$. Si la corde est donnée, le nombre des vibrations est comme $\sqrt{P}$. La raison de m à 1, ou de la circonférence au diamètre, entre dans l'expression du nombre des vibrations de la corde; parce que la raison de $2SB$, longueur de la corde au rayon de courbure, renferme celle-là; & il paroît que c'est-là la différence, à cet égard, entre les Théorèmes par lesquels on détermine les vibrations d'une corde de musique, & celles qui sont produites dans l'air, par les orgues, ou autres instrumens à vent.

930. Puisque la courbe élastique est déterminée par l'équation; (art. 926.) $yy\dot{s} - K\dot{s} = aax$, il suit que $\dot{s} = \frac{\mp aay}{\sqrt{a^4 - (yy - K)^2}}$

$$= \frac{\mp aay}{\sqrt{(aa + K - yy) \times (aa - K + yy)}}. \text{ Comparons cette}$$

Fluxion, avec celle de l'article 805. dont nous avons trouvé que

Fig. 346. la fluente étoit $\frac{S D}{S A} \cdot A R + A E - E P$, & l'on verra, en supposant $a a + K = S A^2$, & $a a - K = S D^2$, que $A M$, arc de la courbe élastique, est égal à $\frac{A D^2}{2 S D^2} \times \left(\frac{S D}{S A} A R + A E - E P \right)$. Donc les figures, qui ont été construites par la rectification de la courbe élastique, peuvent se construire par celle de l'hyperbole & de l'ellipse; particulièrement la courbe le long de laquelle, si un corps pesant se meut, il s'éloignera, en tems égaux, d'un point donné, que M. Leibnitz a construite, par la rectification d'une courbe Géométrique, d'une espèce plus élevée que les sections coniques, & M. Jacques Bernoulli, par la courbe élastique, *Act. Lips.* 1694. p. 272, 277, 338, 370, &c. Les

fluents de $\frac{z^2 \dot{z}}{\sqrt{z^4 - a^4}}$, $\frac{a^2 \dot{z}}{\sqrt{z^4 - a^4}}$, $\frac{a^2 \dot{z}}{\sqrt{a^4 - z^4}}$, & $\frac{z^2 \dot{z}}{\sqrt{a^4 - z^4}}$,

(dont il est fait mention, *ibid.* p. 338. où il est dit, seulement de la première, qu'on peut la déterminer par la rectification de l'hyperbole) sont toutes déterminables par la rectification de l'hyperbole équilatère, & d'une ellipse, dont l'excentricité est égale au second axe. Soient $A E$ & $A R$ une telle hyperbole & ellipse,

$S A = a$, & $S E = z$, alors F. $\frac{z^2 \dot{z}}{\sqrt{z^4 - a^4}} = A E$, & la

fluente de $\frac{a a \dot{z}}{\sqrt{z^4 - a^4}} = A R + A E - E P$. Si $S P$ est une

perpendiculaire abaissée du centre S sur la tangente en E , $S A$

$= a$, & $S P = z$, on aura F. $\frac{-a^2 \dot{z}}{\sqrt{a^4 - z^4}} = A R + A E$

$- E P$, & F. $\frac{-z^2 \dot{z}}{\sqrt{a^4 - z^4}} = E P - A E$, comme on le voit,

par les articles 799 & 802. On peut déterminer les fluents d'autres formes, par la rectification des sections coniques, par les articles 804 & 805.

931. Il est bon de faire voir ici, comment la même Méthode aisée, qui a été donnée dans le Chap. XIII. du Livre I. pour déterminer, par les premières Fluxions seulement, la nature des lignes de la plus vite descente, des figures qui, parmi

toutes celles de circonférences égales, produisent des *maximum* & *minimum*, & de celle qui produit le solide de moindre résistance, sert avec une égale facilité, & évidence, à découvrir l'équation de la courbe, lorsqu'on ajoute d'autres limitations au Problème ; comme lorsqu'il est requis de trouver le solide qui, parmi tous ceux de capacité égale, & qui sont terminés par des surfaces égales, trouvent le moins de résistance dans un fluide. Le Lemme fondamental (démontré dans les articles 572 & 592.) est que si AK est donnée, que KE soit perpendiculaire à AK , que a & u marquent des quantités données, ou invariables, $AE \cdot a - KE \cdot u$ (ou $\frac{AE}{u} - \frac{KE}{a}$) est un *minimum*, lorsque $KE : AE :: u : a$, ou $a KE = u \cdot AE$. Soit la base $FP = x$, l'ordonnée $PA = y$, l'arc $GA = s$, $AK = \dot{y}$; si AE , tangente en A , rencontre KE , parallèle à la base en E , on aura $AE = \dot{s}$, & $KE = \dot{x}$, & il suit, du Lemme, que si V & u représentent des quantités composées des puissances de y , (en sorte qu'elles soient les mêmes lorsque y est la même) & si $\dot{y}$ est donnée, $V \dot{s} - u \dot{x}$, & $\frac{\dot{s}}{u} - \frac{\dot{x}}{V}$ sont des *moindres*, lorsque $V \dot{x} = u \dot{s}$. De-là, il suit (comme dans les articles 576 & 593.) que si GAD est la courbe entière, & que DH , différence des ordonnées en G & D , soit donnée, $F \cdot V \dot{s} - F \cdot u \dot{x}$, ou $F \cdot \frac{\dot{s}}{u} - F \cdot \frac{\dot{x}}{V}$ sera un *minimum*, lorsque la nature de la figure sera déterminée par l'équation $V \dot{x} = u \dot{s}$. Donc, en supposant que ce soit là l'équation de la courbe, & que DH soit donnée, si la fluente de $V \dot{s}$ est aussi donnée, celle de $u \dot{x}$ sera un *maximum* ; ou si celle-ci est donnée, la première sera un *minimum* : & si la fluente de $\frac{\dot{s}}{u}$ est donnée, $F \cdot \frac{\dot{x}}{V}$ sera un *maximum* ; ou si la fluente de $\frac{\dot{x}}{V}$ est donné, celle de $\frac{\dot{s}}{u}$ sera un *minimum*. On voit, de même, (comme dans l'article 595.) que si DH avec la base FC ou GH sont données, & que la fluente de $V \dot{s}$ soit donnée, ou invariable, $F \cdot u \dot{x}$ sera un *maximum*, ou un *minimum*,

lorsque l'équation de la courbe est $V \dot{x} = (e \mp u) \dot{s}$, où e marque une quantité invariable, qui peut être positive, ou négative, ou disparaître.

932. Supposons donc $V = A + By + Cy^2 + Dy^3 + \&c.$ & $u = a + by + cy^2 + dy^3 + \&c.$ ou $A, B, C, \&c.$ & $a, b, c, \&c.$ marquent des coefficients invariables, qui peuvent être positifs, ou négatifs, dont chacun peut être supposé disparaître; & la fluente de $V \dot{s} - u \dot{x}$, c'est-à-dire de $\dot{s} (A + By + Cy^2 + \&c.) - \dot{x} (a + by + cy^2 + \&c.)$ sera un *minimum*, lorsque l'équation de la figure sera $\dot{x} (A + By + Cy^2 + \&c.) = \dot{s} (a + by + cy^2 + \&c.)$, l'ordonnée DH étant donnée. Donc, si la fluente $\dot{s} (A + By + Cy^2 + \&c.)$ est aussi donnée, la fluente de $\dot{x} (a + by + cy^2 + \&c.)$ sera un *maximum*, ou si celle-ci est donnée, la première sera un *minimum*: & si la base FC ou GH est donnée avec DH , & $F \dot{s} (A + By + Cy^2 + \&c.)$, alors $F \dot{x} (a + by + cy^2 + \&c.)$ sera un *maximum*, ou un *minimum*, lorsque $\dot{x} (A + By + Cy^2 + \&c.) = \dot{s} (e \mp (A + By + Cy^2 + \&c.))$. Un cas ordinaire, mais qui n'est que particulier de ce Théorème, est que si la nature de la figure est déterminée par la dernière équation, & que GH, DH , avec les fluentes de $A \dot{s}, B y \dot{s}, C y y \dot{s}, \&c. b y \dot{x}, c y y \dot{x}, d y^3 \dot{x}, \&c.$ sont toutes données, invariables, excepté une seule, cette dernière fluente sera un *maximum* ou *minimum*.

933. Par exemple, les points G & D étant donnés, si la circonférence GAD (ou $F.A \dot{s}$) est aussi donnée, l'aire $FGADC$ (ou $F.y \dot{x}$) est un *maximum*, ou un *minimum*, lorsque $A \dot{x} = \dot{s}$, ($e \mp A \mp By$) c'est-à-dire, lorsque GAD est un arc de cercle. Si la surface produite par l'arc GAD , autour de l'axe FC , (ou $F.B y \dot{s}$) est donnée, le solide produit par la figure $FGADC$, autour du même axe, (ou $F.c y y \dot{x}$) est un *maximum* ou *minimum*, lorsque $B y \dot{x} = \dot{s} (e \mp c y y)$; & lorsque $e = 0$, c'est en-

core un cercle. Si la circonférence GAD (ou $F. A \dot{s}$) est donnée, le solide produit par $F G A D C$, autour de l'axe FC , est un *maximum* ou *minimum*, lorsque $A \dot{x} = (e \mp c y y) \dot{s}$, & GAD est la courbe élastique, qui a été construite, par les arcs des sections coniques, dans l'article 928. Si $F. \dot{s} (A + B y)$ est donnée, la fluente de $\dot{x} (a + b y + c y y)$ est un *maximum*, ou un *minimum*, lorsque $\dot{x} (A + B y) = \dot{s} (e \mp (a + b y + c y y))$. Et ce n'est qu'un cas particulier de ce Théorème, que la même équation renferme celle de la figure, lorsque les points G & D , avec la surface produite par GAD , autour de FC , & l'aire $FGADC$, sont invariables, & que le solide produit par cette aire, autour de l'axe FC est un *maximum*, ou un *minimum*. Car puisque, par la supposition, les fluentes de $\dot{s} (A + B y)$ avec $F. a \dot{x}$, & $F. b y \dot{x}$ sont données, enforte que $F. c y y \dot{x}$ est seule variable, & que la fluente de $\dot{x} (a + b y + c y y)$ est un *maximum*, ou un *minimum*, il est évident que $F. c y y \dot{x}$ est un *maximum*, ou un *minimum*. Et il n'est pas nécessaire, pour avoir ces sortes d'équations, de recourir aux plus hautes Fluxions, ou de réduire l'élément de la courbe à un nombre de parties infiniment petites. On peut tirer de là d'autres exemples à volonté, de la même manière.

934. La même Méthode s'étend à plusieurs autres sortes de Problèmes, par l'article 605. Que V maintenant soit composé des puissances de $\dot{s}$ & $\dot{y}$ aussi-bien que des puissances de y , & de

quantités invariables. Par exemple, soit $V = \frac{K \dot{y}^n}{\dot{s}^n} + A + B y$

$+ c y^2 + D y^3 + \&c.$ ou K est supposée composée des puissances de y , & de quantités invariables, & $u = a + b y + c y y + \&c.$ comme auparavant. Il est clair, comme dans l'article

605. que $V \dot{s} \mp u \dot{x}$ fera un *minimum*, lorsque $(1 - n) \frac{K \dot{y}^n \dot{x}}{\dot{s}^n}$

$\mp A \dot{x} + c y^2 \dot{x} + \&c. = \mp \dot{s} u = \mp \dot{s} (a + b y + c y y + \&c.)$, & en substituant 3 pour n , cette équation sert à résoudre les Problèmes, que l'on peut proposer sur le solide de moindre résistance. Car, supposant que le solide, produit par la

Fig. 350.

révolution de la figure $F G A D C$, se meut dans un fluide avec une vitesse donnée, & dans la direction de l'axe CF ; alors, selon le sentiment commun de l'action des particules des fluides sur les corps, (ou si le fluide est rare, comme Newton le suppose) la résistance de la surface conique, par la tangente AE , fera

finalement comme $PA.AK. \frac{AK^2}{AE^2} = \frac{y \dot{y}^3}{\dot{s}^2} = \frac{y \dot{y}^3}{\dot{s}^3} \cdot \dot{s}$, &

$2 y \dot{y}^3 \dot{x} - \dot{x} \dot{s}^3 (A + By + cy^2 + \&c.) = \dot{s}^4 (a + by + cy^2 + \&c.)$ est l'équation de la courbe, qui produit le solide de moindre résistance, lorsque les points G & D , avec les fluentes de $A\dot{s}$, $B\dot{y}\dot{s}$, $c\dot{y}^2\dot{s}$, & $F.\dot{x} (a + by + cy^2 + \&c.)$ sont supposés donnés, ou invariables. Ainsi les points D & G seulement étant donnés, l'équation est $2 y \dot{y}^3 \dot{x} = a \dot{s}^4$, comme Newton l'a trouvé. Si les solides sont supposés terminés par des surfaces égales, l'équation, pour la figure qui produit le solide de moindre résistance, est $2 y \dot{y}^3 \dot{x} - B \dot{y} \dot{x} \dot{s}^3 = a \dot{s}^4$. Si le solide doit avoir la moindre résistance parmi tous ceux qui ont la même capacité, & qui sont terminés par des surfaces égales, l'équation est $2 y \dot{y}^3 \dot{x} - B \dot{y} \dot{x} \dot{s}^3 = a \dot{s}^4 + c \dot{y}^2 \dot{s}^4$, & l'on trouve, de même, l'équation, lorsqu'on ajoute d'autres limitations relatives à la circonférence GAD , à l'aire $F G A D C$, &c.

Fig. 351.

935. Comme les Théorèmes proposés dans l'article 563. & expliqués dans les articles suivans, sont d'un plus grand usage, il est bon de donner un exemple de la manière dont on peut les appliquer, pour découvrir l'équation de la figure requise. Soit V la vitesse acquise à chaque point A , en raison de $(A \dot{x}'' + B \dot{y}'') x^k y^l$, & qu'on demande l'équation de la ligne de la plus vite descente. Soit OA le rayon de courbure en A , considéré comme donné de position, & supposant que le point O subsiste, soit A qui se meuve dans la droite OA , & que AP soit toujours perpendiculaire à FC en P ; soit $OA = q$, $FP = x$, & $AP = y$, si OA rencontre FC en T , — $\dot{x} : \dot{q} :: PT : TA :: \dot{y} : \dot{s}$, & $\dot{y} : \dot{q} :: PA : TA :: \dot{x} : \dot{s}$. Mais, par le Théorème de l'article 565. OA & u croissent proportionnellement, pendant que le point A est supposé se mouvoir dans la droite OA ; c'est-à-dire, $\frac{\dot{q}}{q} = \frac{\dot{u}}{u}$

$$= \frac{n A x^{n-1} \dot{x} + m B y^{m-1} \dot{y}}{A x^n + B y^m} + \frac{k \dot{x}}{x} + \frac{l \dot{y}}{y}$$
 Donc, en substituant $\frac{-\dot{q} \dot{y}}{\dot{x}}$ pour $\dot{x}$, & $\frac{\dot{q} \dot{x}}{\dot{y}}$ pour $\dot{y}$, & ensuite divisant par $\dot{q}$, & substituant pour le rayon de courbure q sa valeur $\frac{\dot{x}^2}{-\dot{x} \ddot{y}}$, $\dot{x}$ étant supposée constante, il suit que $\frac{\ddot{y} \dot{x}}{\dot{x}^2} =$

$$= \frac{n A x^{n-1} \dot{y} - m B y^{m-1} \dot{x}}{A x^n + B y^m} + \frac{k \dot{y}}{x} + \frac{l \dot{x}}{y}$$
 Si l'on veut que la courbe soit décrite dans un moindre tems, qu'aucune autre d'une égale circonférence, ou pourra trouver l'équation, par le troisième principe général, exposé dans l'article 563.

936. Les exemples précédens, peuvent servir à faire voir le grand usage de la Méthode des Fluxions en Géométrie, & en différentes parties de la Philosophie. Dans l'idée que nous avons donné de cette théorie, dans le premier Livre, nous avons supposé, avec Newton, que les quantités sont produites par le mouvement, & nous avons considéré la Fluxion d'une quantité, comme la vitesse, ou la mesure de ce mouvement. Nous avons cependant démontré quelques Propositions, (comme la 20^e & la 32^e, sans faire usage des Fluxions, & l'on peut, de même, établir plusieurs autres théories, décrites dans ce Livre, & dans le précédent, d'une manière qui soit indépendante de la notion d'une Fluxion. Ainsi, on démontre aisément, par l'article 710. que supposé que n soit un nombre entier & positif, si l'aire, sur la base AP, ou x est toujours égale à x^n , l'ordonnée PM où y sera toujours égale à $n x^{n-1}$. Car, si o représente Pp un incrément de la base x ; puisque x & y croissent en même tems, $PM \times Pp$, ou $y \times o$ sera moindre que $PM \mu p = (x + o)^n - x^n$, incrément simultané de l'aire, lequel (en substituant $x + o$ pour E & x pour F, dans l'article 710.) est moindre que $n (x + o)^{n-1} \times o$; par conséquent y est moindre que $n (x + o)^{n-1}$. On voit, de même, que $PM \cdot Pp$, ou $y \times o$ est plus grand que $PM \mu \pi = x^n - (x - o)^n$, qui, par le même article, est plus grand que $n o (x - o)^{n-1}$. Donc l'ordonnée y est plus grande que $n (x - o)^{n-1}$. Mais si l'on dit que y soit plus grand que $n x^{n-1}$, supposons $y = n x^{n-1}$

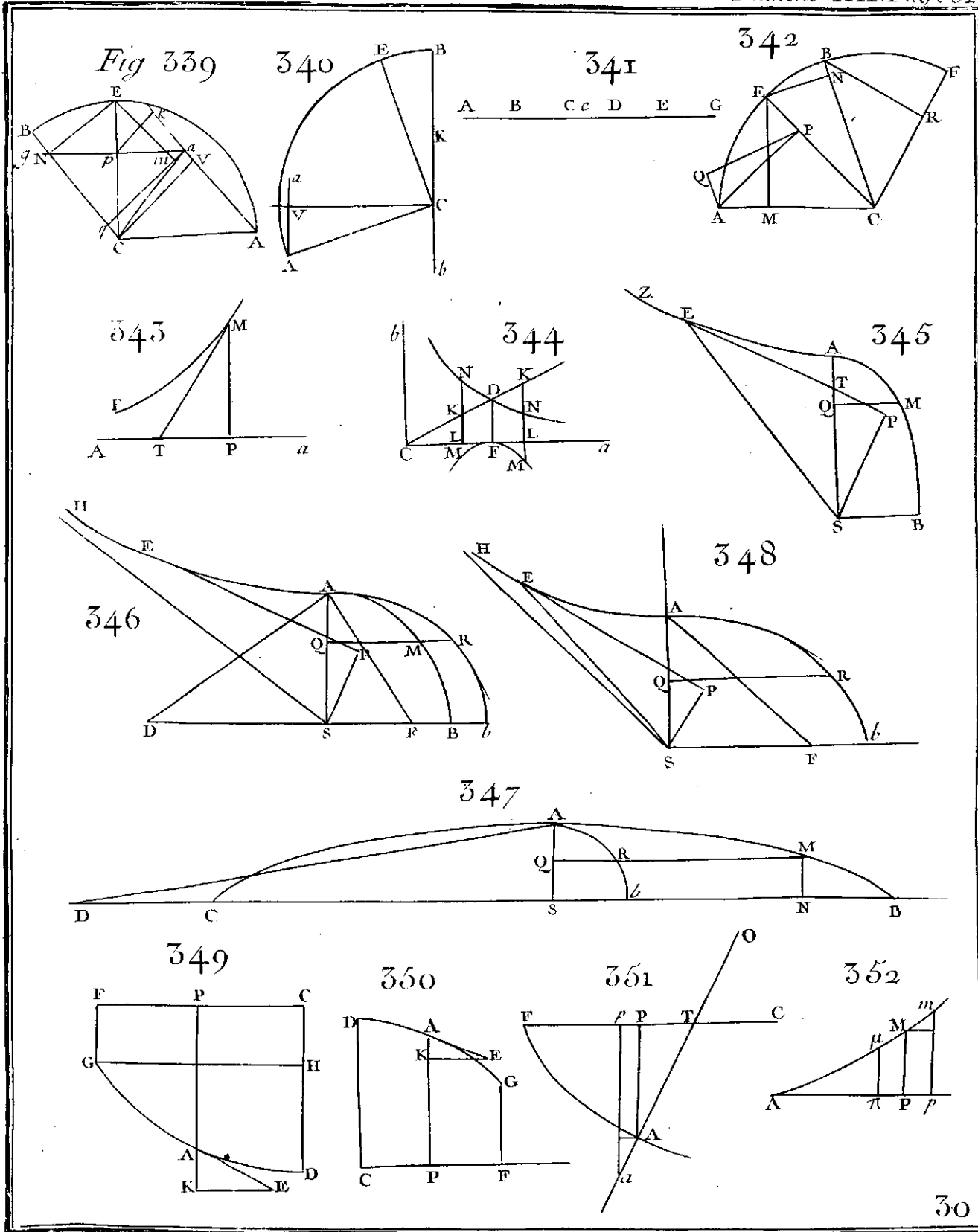
$+r \& o = (x^n - 1 + \frac{r}{n})^{\frac{1}{n-1}} - x$, ou $(x+o)^{n-1} = x^{n-1} + \frac{r}{n}$; donc $y = nx^{n-1} + r = n(x+o)^{n-1}$; le contraire de ce qui a été démontré. Et si l'on dit que y est moindre que nx^{n-1} ,

soit $y = nx^{n-1} - r$, & $o = x - (x^{n-1} - \frac{r}{n})^{\frac{1}{n-1}}$, ou $(x-o)^{n-1} = x^{n-1} - \frac{r}{n}$, donc $y = nx^{n-1}$, contre ce

qui a été démontré. Donc $y = nx^{n-1}$. J'ai joint quelques démonstrations de cette espèce, pour quelques autres Théorèmes; mais elles ne me paroissent pas nécessaires, après ce que j'ai démontré, si au long, dans le premier Livre, & dans le premier Chapitre de celui-ci, sur l'évidence de cette Méthode. Nous avons parlé de tems en tems des infinis, dans ce Chapitre, selon le style ordinaire des Ecrivains en cette matiere; mais nous n'avons pas pris plus de liberté, dans l'usage de ces expressions, qu'on ne l'accorde communément aux Auteurs qui traitent des parties inférieures de cette science, surtout à ceux qui ont traité de la Trigonométrie; car, en déterminant la tangente & la sécante de chaque arc de cercle, & trouvant qu'aucune tangente, ou sécante finie, ne peut appartenir au quart de cercle, ils la marquent *infinie* dans leurs tables. C'est dans le même sens que y ou y sont supposées, en certains cas, devenir infinies. Mais nous ne prétendons pas tirer aucune conclusion, touchant les infinis, par l'usage de ces expressions concises & convenables, ni aucune conséquence d'aucune espèce, autre que celles que l'on peut justifier d'ailleurs, par une évidence incontestable.

937. Dans cette théorie, lorsqu'on a déterminé la vitesse d'un mouvement, ç'a été toujours relativement à la vitesse de quelque autre mouvement, & lorsqu'on a cherché en quelle proportion, par exemple, l'ordonnée croît ou décroît, ç'a été toujours relativement à la base, ou à quelque autre grandeur, avec laquelle on l'a comparée. C'est donc uniquement l'espace, & le mouvement relatif que nous avons occasion de considérer dans cette Méthode, & il n'y a point de quantité dont nous ayons une idée plus claire que de celle-là.

Fin du second Volume.



Errata du second Volume.

- P** Age 1, ligne 5, rayons, lisez, raisons.
la même faute est dans les titres p. 9 & 11.
- p. 2 à la marge, rejetées, lisez, répétées.
- p. 6, art. 490. l. 5. ET, lisez, EI. l. 22, GN, lisez, GH.
- p. 10, l. 14, ED, lisez, AD.
- p. 11, l. 5, lisez, leurs.
- p. 14, art. 510, lig. dernière, CL, lisez, LP.
- p. 16, seconde colonne de la note, ligne 11, 500000, lisez, 500 milles.
- p. 17, art. 513. l. 9, par conséquent, ajoutez, la vitesse.
- p. 19. l. 4 en remontant, P &, lisez, soit P.
- p. 20 art. 517. l. 5, générale, lisez, est générale. l. 16, représentées, lisez, seront représentées.
- p. 21, l. 8, DQ², lisez, GQ².
- p. 24, l. 11, ez, lisez, t z. l. 12 ez, lisez, e Z.
- p. 29, l. 8, D, lisez, d.
- p. 31, l. 13, représenteront, ajoutez, les Fluxions respectives de $\frac{1}{2} VV$, $\frac{1}{2} uu$, $\frac{1}{2} vv$ & Gx, ky, lz.
- p. 36, art. 530 l. 13, est à, lisez, est égal à.
- p. 40, l. 2, KV², lisez, KA².
- p. 41, l. 2, n1, lisez, na1, l. 15, — $\frac{1}{2}$ GE², lisez, — $\frac{1}{2}$ GN². l. 35, A.BI², lisez, B.BI². l. 36, S.AC, lisez, S.IC.
- p. 46, lig. dernière, à AB, effacez, à.
- p. 47, l. 15, du frottement de la résistance de l'aire, lisez, du frottement, de la résistance de l'aire, l. 19, supplée, lisez, supplée. l. 24, QEF², lisez, 2EF².
- p. 48, l. 3, l'orifice, ajoutez, se trouve moindre que l'orifice.
- p. 49, effacez la première ligne. l. 10, si l'espace, lisez, si S est l'espace. l. 6, en remontant, continue, lisez, continue.
- p. 53, l. 3, FC, lisez, FK.
- p. 54, l. 6, par, lisez, a l. 17, $\frac{AA - x}{AAxx}$ lisez, $\frac{AAx}{AA - xx}$.
- p. 55, l. 12, x, lisez, X.
- p. 56, art. 551. l. 11, que l'on prend pour, lisez, que prend. l. 21, la verticale qui, lisez, la verticale du point G passe.
- p. 57, l. 7, de quelques, effacez, de. à la marge, Pl. XXV. lisez, Pl. I.
- p. 61, art. 559. l. 15, courbure AE, lisez, la courbe AE.
- p. 63, l. 26, ou, lisez, au.
- p. 65, l. 12, Sa, lisez, à Sa.
- p. 68, l. 17, chargée, lisez, changée.
- p. 69, art. 570, l. 1, effacez, est.
- p. 74, l. 1, OT, lisez, KT, l. 7, un, lisez, au. l. 9, FA, lisez, Fa.
- p. 75, Sx, VZ, &c. lisez, s x, VZ, v z & Bp.
- p. 76. l. pénult. cercle, ajoutez, HNh.
- p. 77. l. pénult. un, lisez, au.
- p. 78, l. 9, k e, lisez, k E.
- p. 80, art. 583. l. 7, à SD, lisez, à DG.
- p. 82, art. 586. l. 5, ou centre, lisez, au centre.
- p. 83, l. 19, de l'exposant, lisez, de SM dont l'exposant est $\frac{2}{n-1}$.
- p. 86, art. 592, l. 18, VK, lisez, VR. art. 593. l. pénult. LN, lisez, N.
- p. 87, l. 4. étant, lisez, sont.
- p. 90, art. 598. l. 2, au, lisez, une.
- p. 91, l. 3, passent, lisez, passant. l. 15, AB, lisez, AR.
- p. 92, l. 20, Eex, lisez, Eek. art. 602. l. 10, AMmil, lisez, ABmil.
- p. 95, l. 6, Da. AK. lisez, Da AK.RN. art. 607, l. 7, fluide, lisez, solide.
- p. 97, art. 610. l. 4, e est, lisez, c est.
- p. 99, art. 618. l. 1. effacez, de.
- p. 100, l. 4, détruire, lisez, décrire.
- p. 102, l. 7, c q m, lisez, c g m.
- p. 103, art. 625. l. 4, MR, lisez, NR.
- p. 104, l. 1, HIP, lisez, HPI.
- p. 105, art 630. l. 1, trou solide, lisez, solide creux.
- p. 107, l. 10, en remontant, extérieur, lisez, intérieur.
- p. 108, l. 17, position, lisez, portion.
- p. 112, l. 10, CO² — CL², lisez, CO² — Cl².
- p. 114 l. 4. NS, lisez, NR. l. 15, BNB, lisez, BNB.
- p. 115, lig. dernière, + $\frac{2AC^3}{3PC^2}$, lisez, $\frac{2AC^3}{3PC}$.
- p. 116, art. 645. l. 4, $\frac{4}{3}AC$, lisez, $\frac{4}{3}AC^2$. l. 5, en remontant, DN, lisez, Dn.
- p. 117, l. 5, AK. GC, lisez, AKGC. l. 8, branche, lisez, tranche.
- p. 118, l. 3, CD, lisez, CD².

- p. 110, l. 8, $\frac{CL^2}{Ix^2}$, lisez, $\frac{Ix^2}{CL^2}$. l. 10, ix^2 , Cd^2 est à la, &c. lisez, Ix^2 est à la différence de Ix^2 & Iy^2 . l. 11, EPm, lisez, & Pm. l. 17, Clp, lisez, ClP. l. dernière, NL, lisez, NR.
- p. 121, l. 9, R, lisez, PR. l. 17, CA², lisez, CA. art. 650. l. 3, $\frac{2CA.CD^2}{CF^3}$ &c. lisez, $\frac{2CA.CD^2}{CF^3} \times (CF - CS)$; l. 6, est celle, lisez, est à celle.
- p. 122, en remontant, l. 5, Cr. Cd, lisez, Ca. Cd².
- p. 124, article 655. l. 10, Bb, lisez, Db. l. 11, $\frac{1.c^2}{5b^2}$, lisez, $\frac{2.c^2}{5b^2}$.
- p. 125, l. 8, KK: CA², lisez, KK: 1, CA². l. 11, point, ajoutez, P.
- p. 126, lig. 8, SS, lisez, SSz. lig. 9, $\frac{9zz}{36}$, lisez, $\frac{9zz}{56}$. l. 19, R, lisez, A. l. 30, $\frac{Cd}{4}$, lisez, Cd.
- p. 128, l. 2, effacez, du. l. 8, décroît 1438, lisez, décroît 1430.
- p. 129, l. 25, bb: ajoutez, LL — ll: l. 29, & suiv. $\frac{2}{3}$ est exposant de G, g, &c.
- p. 130, l. 2 + 55 —, lisez, — 55 +.
- p. 131, l. 10, AA, lisez, AC. l. 4, en remontant, (b — a), lisez, d (b — a).
- p. 132, l. 5, db², lisez, dc².
- p. 134, l. 21, CDu z, lisez, ZVv z, ce qui, l. 23, $\frac{2CD^2CA}{CF^3}$. lisez, $\frac{2CD^2.CA}{CF^3}$. VK. Vv. l. 3 en remontant, OKAC. CD, lisez, OKHC. x. CD. l. 2. DE, lisez, CF.
- p. 135, l. 2, effacez, est à la sphéroïde.
- p. 136, a t. 67. l. 7, Ca² à CA², lisez, Ca à CA, c'est-à-dire, comme Ca² à CA².
- p. 137, l. 3, en remont. parce, lisez, parce que.
- p. 138, l. 9, $\frac{Qz}{b}$, lisez, $\frac{QZ^2}{b^2}$. l. 13, $\frac{Qz^2}{bc}$, lisez, $\frac{Qz^2}{b^2}$.
- p. 139, art. 677. l. $\frac{n+3}{n+3}$ lisez, $\frac{n+3}{2n+4}$. l. 12, n — 1, lisez, N (n — 1),
- p. 141, art 681, l. 3, & convexes, lisez, & concaves. l. 4, intérieure, lisez, extérieure.
- p. 143, art. 681. l. 13, le demi-axe, lisez, le demi-diametre.
- p. 144, l. 4, $\frac{1}{15}$, lisez, $\frac{1}{15^2}$.
- p. 146, l. 2, Ad D, lisez, Ad B. l. 3. en remontant, à x, lisez, à 4x.
- p. 155, l. 5, entrent, lisez, qui entrent.
- p. 160, art. 707, l. 15, 2Au + Oa, lisez, 2Aa + Oa.
- p. 161, art. 708. l. 7, BB, lisez, AB. l. 11, $\frac{a}{A}$, lisez, $\frac{a}{B}$. art. 709. l. 4, — Fⁿ. car, ajoutez, ces termes étant formés en retranchant continuellement l'unité de l'exposant de E, & l'ajoutant à l'exposant de F, le dernier terme sera F^{n—1}; le produit.
- p. 162, art. 712. l. 6, $\frac{na}{r}$, lisez, $\frac{r}{na}$.
- p. 163, art. 713. l. 7, $\frac{nE - nF}{EF^n}$, ajoutez, $\times (E - F)$.
- p. 164, art. 715. l. 3, b, d, lisez, b, c, d. l. 8, BQ, lisez, BR. l. 10, a, q, x, lisez, a, q, r. l. 12, — $\frac{r}{R}$, lisez, $\frac{r}{R}$.
- p. 165, art. 718. l. 2, une, lisez, même. l. 8, croîtront, ajoutez, par des différences qui croissent ou décroissent.
- p. 166, l. dernière, A^{n—1}, lisez, A^{n—2}.
- p. 167, l. 12, de m, lisez, de l'ordre m. art. 721, l. 12, 6Aa², lisez, 6a³.
- p. 170, art. 726. l. 5, directement lisez, divisant.
- p. 171, l. 3, fraction, lisez, Fluxion. l. 4, 4⁴ $\frac{1}{x}$, lisez, 4x^{4—1}. l. 18, x^{— $\frac{1}{3}$} , lisez, $\frac{1}{3}x$.
- p. 172, art. 728, l. 13, $\frac{x \cdot x}{c+x}$, lisez, $\frac{r \cdot x}{c+x}$.
- p. 173, art. 730. l. 3, x — r, lisez, x — s. l. 4, r, ou à s, ou à u, lisez, r, ou à s, ou à u.
- p. 176, art. 736. l. 10, y c, lisez, y e. même pag. lig. dern. variable de, ajoutez, la fluente de.
- p. 178, art. 740. $\frac{\dot{p}}{p} + \text{lisez, } \frac{\dot{p}}{p} =$.
- p. 179, art. 742, l. 3, fr, lisez, f^r.
- p. 180, l. penult. ax^{—2}, lisez, x^{—1}.
- p. 181, l. 6, — z, lisez, — x. lig. dernière, $\frac{aa + xx}{aa}$, lisez, $\frac{aa}{aa + xx}$.
- p. 182, l. 1, + $\frac{x^2 \cdot x}{a^4}$, lisez, + $\frac{x^4 \cdot x}{a^4}$.
- p. 183, l. 1, CPMP, lisez, CBMP. l. 19, $\frac{x^4}{8a^5}$, lisez, $\frac{x^4}{8a^4}$. l. 22, $\frac{x^3}{a^3}$, lisez,

- $\frac{x^3}{3a^2} + \frac{2x^5}{1, a^4} + \frac{8x^7}{105 a^6}$.
 p. 184, l. 21, $x = 0$, lisez, $x = 0$.
 p. 185, l. 7, n , lisez, nb , ndx , lisez, $3ndx^2$.
 l. 14, secteur, lisez, lecteur.
 p. 188, ligne 4, $\frac{\ddot{E} z^2 z}{1.2.2^2}$, lisez, $\frac{\ddot{E} z^2 z}{1.2.2^2}$.
 $+ \frac{\ddot{E} z^3 z}{1.2.3.2^3}$, l. 6, $\frac{\ddot{E} z^2}{1.2.2}$, lisez, $\frac{\ddot{E} z^2}{1.2.2}$.
 p. 190, l. 12, $y : y ::$ lisez, $y : z$.
 p. 192, l. 9, $\frac{5a}{z^5}$, lisez, $\frac{z^5}{5a^5}$, l. 16, HI, lisez, HO.
 p. 193, l. 3, arcs secteurs, lisez, arcs ou secteurs.
 p. 194, art. 759. l. 4, $n = 1$, lisez, $n : 1$.
 lig. pénult. a^{n^2} , lisez, a^{2n} .
 p. 195, art. 760. l. 5, $a + \sqrt{xx} = aa$, lisez, $x + \sqrt{xx} = aa$.
 p. 196, l. 2, $\sqrt{-1}$, lisez, $\times \sqrt{-1}$.
 lig. pénult. $T =$, lisez, $T = ax$.
 p. 199, art. 766. l. 3, Bb , lisez, Bb^2 .
 p. 201, art. 768. l. 4, $y^{2n} =$, lisez, $y^{2n} =$.
 p. 202, ligne 9, $= 2$, lisez, $= 2z$, l. 10, $\sqrt{2z \mp 2y}$, lisez, $\sqrt{2z \mp 2}$, l. 12, $y \sqrt{2z \mp 2 + 1}$, lisez, $y \sqrt{2z \mp 2 + 1}$.
 l. 34 & 36, divisions, lisez, diviseurs.
 p. 203, l. 3, $\sqrt{(\sqrt{zz} - 1)}$, lisez, $\sqrt{(z + \sqrt{zz} - 1)}$, l. 15, $(\sqrt{xx} - 1)^n$, lisez, $(+x - \sqrt{xx} - 1)^n$.
 p. 204, l. pénult. $\frac{a^m}{m}$, lisez, $\frac{a^m}{M}$.
 p. 211, art. 779. l. 6, $N - mx$, lisez, $M - mx$.
 p. 212, l. 5, $2e - a$, lisez, $2e - 2a$, l. 6, $-f +$, lisez, $-f =$, art. 780. l. 4, $ec - 2ac$, lisez, $ee - 2ae$, l. 10 & suiv. I, lisez, I, la même faute se trouve dans la page qui suit.
 p. 213, l. 13, $AZ =$, ajoutez, $(m-1)AB$, ou.
 p. 215, l. pénult. $n - d$, lisez, $x - d$, l. dern. Ax^{n-1} , lisez, $-Ax^{n-1}$.
 p. 216, art. 785. l. 6, $(x+b)^{m-2}$, lisez, $(x+a)^{m-2}$.
 p. 217, art. 786. l. 3, $\frac{-H}{m-2}$, &c. lisez, $\frac{-H}{(m-1)}$.
 p. 218, l. 16, $\frac{(b-a)^m}{b^m}$, lisez, $\frac{b^m}{(b-a)^m}$.
 même lig. $-m(m-1)$ &c. lisez, $m(m-1)$ &c.
 art. 780. l. 2, $x^{\frac{m+x}{m+r}}$, lisez, $x^{\frac{m+r}{m+x}}$.
 p. 219, art. 792. l. 3, $0 - fx^n$, lisez, $e - fx^n$.
 p. 220, l. 3, $e + fx^n$, lisez, $e - fx^n$.
 p. 222, l. 10, des, lisez, ces.
 p. 226, lig. 5, s, lisez, s art. 800. lig. 5, $\sqrt{1 - xx}$, lisez, $\sqrt{1 + xx}$.
 p. 231, art. 806. $\frac{\dot{p} \sqrt{a^4 + K^2 p^2}}{\sqrt{aa} - pp}$, lisez, $\frac{\dot{p} \sqrt{a^4 + K^2 p^2}}{a \sqrt{aa} - pp}$, article 807, lig. 2, $\frac{bb}{pp}$, lisez, $\frac{pp}{bb}$.
 p. 232, l. 15, diamètre A, lisez, diamètre a.
 l. 16, $\frac{4E}{a}$, lisez, $\frac{a}{4E}$, l. 17, $1 = \frac{x}{a}$, lisez, $1 = \frac{x}{a}$, l. 21, $A \dot{p}^2$, lisez, $\dot{A} p^2$.
 p. 234, l. 12 & 13, fluente de, lisez, la fluente est.
 p. 235, l. 16, se confond, lisez, P se confond.
 p. 237, art. 814. l. 3, $x^2 : xC$, lisez, $x^2 B : xC$.
 p. 238, art. 816. l. 2, n^{n-2} , lisez, A^{n-2} .
 l. 8, $n-1$, lisez, $n-2$, art. 817. l. 2, xa , lisez, xx .
 p. 239, l. dern. x^{sn-1} , lisez, xx^{sn-1} .
 p. 240, l. 13, $K - l$, lisez, $K + l$, f^{dn} , lisez, $f d^n$.
 p. 242, l. 15, $a \dot{x}$, lisez, $a a \dot{x}$.
 p. 245, art. 828, l. 9, $\frac{\ddot{a}}{2}$, lisez, $-\frac{\ddot{a}}{6}$.
 p. 248, l. 9, $A_{22}S$, lisez, $A = 12S$, l. 10, changez tous les signes excepté + du premier terme. l. 12, $S - \frac{\beta}{24}$, lisez, $S = A - \frac{\beta}{24}$.
 ajoutez un 0 au dénominateur
 15481880 art. 833. l. 8 +), lisez,) +
 p. 250, l. antépénult. 2401, lisez, 341.
 p. 251, art. 836, l. 8, la distance, lisez, la base
 Sf iij

- à la distance. art. 837. l. 4, $\frac{1}{m}$, lisez $\frac{1}{m^5}$
- p. 252, l. 13, $\frac{2}{3}$, lisez, $\frac{1}{3}$.
- p. 254, l. 3, logarithme ==, lisez, logarithme
- 2 ==. art. 841. l. 1, sommes, lisez, termes.
- l. 15, $\frac{c\beta}{4} - \frac{e^3\delta}{48}$, lisez, $\frac{c\beta}{4} - \frac{e^3\delta}{48} +$
- p. 255, l. 3, logarithme, lisez, log. n. l. 6,
- + &c. ajoutez, + log. + $\frac{\log. n}{2}$ l. 7,
- 3 β , lisez, 2 β . l. 18, trouvant, lisez, cher-
- chant. l. 20, dernière, ajoutez, suite.
- p. 256, art. 843, l. 3, 179, lisez, 169.
- p. 257, l. 14, r = 5, r = 6.
- p. 258, l. 2, $\frac{1}{m}$, ajoutez, en sorte que m soit un
- fort grand nombre (égal, par exemp. à 25 ou
- 27) & ensuite calculant la somme des au-
- tres termes, par le moyen de cette suite. Si
- r = 2, on aura S = $\frac{1}{2mm} + \frac{1}{2m^3} - \frac{1}{2m^5}$
- + $\frac{3}{2m^7}$ - &c. par où l'on peut calculer
- de même, la somme de la suite $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9}$
- $\frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \frac{1}{36} + \frac{1}{49}$ + &c. en supposant
- r = 1, & e = 2, on peut calculer la som-
- me de la suite $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$
- + $\frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17}$ + &c. en additionnant d'a-
- bord les termes du commencement de la
- suite, qui précèdent $\frac{1}{m}$, sçavoir.
- p. 259, l. 3, z, lisez, e =. l. 4, z, lisez, e.
- pénult. $\frac{A + 4C}{6}$, lisez, $\frac{A + 4C}{6} R$.
- p. 260, l. 2, $\frac{2Q}{R} +$, lisez, $\frac{2Q}{R} =$. l. 25,
- $\frac{e^3\zeta}{30240}$, lisez, $\frac{e^5\zeta}{30240}$.
- p. 261, l. 2, &, lisez, en.
- p. 262, l. 6, Ff, lisez, Af art. 853, l. 3, $\frac{25}{2}$,
- lisez, $\frac{25}{12}$, $\frac{117}{60}$, $\frac{147}{60}$.
- p. 263, art. 855. l. 4, B π , lisez, A π .
- p. 264, l. 4, en montant, $\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y}$, lisez,
- $\frac{y\sqrt{x^2 + y^2}}{y}$.
- p. 268, art. 863, l. 6, $\frac{y}{x^2}$, lisez, $\frac{y}{x^2}$. lig. 10,
-
- y &, lisez, y disparaissent & si.
- p. 269, l. 10, a $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{x}}{a}$, lisez, a $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{x}}{\sqrt{a}}$
- p. 270, art. 866. l. 14, sera, lisez, P M sera.
- p. 271, l. 3, Fluxion, lisez, inflexion.
- p. 273, l. 3, $\frac{s^2}{y}$, lisez, $\frac{s^2}{y}$.
- p. 275, l. 10, $\frac{1}{p^2}$, lisez, $\frac{1}{p}$. art. 875. l. 4;
- $x \frac{m+3}{2}$, lisez, $x \frac{m+3}{2}$.
- p. 276, l. 7, 2Kr - $\frac{2m+2}{m+3}$, lisez, enfor-
- te que cette fraction soit l'exposant de r.
- p. 277, art. 877. l. 14, $s^2 : s^2$, lisez, $s^2 : z^2$.
- p. 278, l. 5, l + mm, lisez, 1 + mm.
- p. 279, l. 9, $\frac{r^2}{1} + \frac{yrr\sqrt{m}}{2a}$, lisez, $\frac{r^2}{2}$ =
- $\frac{yrr\sqrt{m}}{2a}$. art. 880. l. 8, $\sqrt{x^2}$, lisez, $\sqrt{x}$.
- p. 280, l. 4, $\sqrt{aa + mm}$, lisez, $\sqrt{aa + mmrr}$.
- p. 282, l. 5, = 2gz, lisez, 2gz.
- p. 283, art. 887. l. 3, N2, lisez, N.
- p. 285, art. 889. l. 12, $\frac{x}{s}$, lisez, $\frac{x}{s}$.
- p. 286, l. pénult. 2 - m + 1, lisez, - 2m + 1.
- p. 287, art. 892. l. 2, 3 $x^{\frac{1}{3}}$, lisez, 3 $x^{\frac{1}{3}}$. l. 7,
- $ra^{\frac{1}{2}}$, lisez, $ra^{\frac{1}{2}}$. l. 16, $\sqrt{ra}$ = lisez, $\sqrt{ra} +$.
- p. 288, art. 894. l. 2, E, lisez, F. l. 12, l'axe,
- lisez, l'arc.
- p. 290, l. 8, dh, ajoutez, & rencontre d T.
- p. 291, l. 10, T - d, lisez, Td. l. 11, C E, lisez,
- C F. art. 898. l. 3, par, lisez, pour.
- p. 292, l. 7, pour, lisez, servira. art. 900. l.
- pénult. rn - 2, lisez, rⁿ⁻².
- p. 293, art. 902. l. 7, 2a, lisez, 2a). l. 10, 2 - n³,
- lisez, 3. l. 11, 3. 2., lisez, 3. 2ⁿ⁻².
- p. 296, l. 8, 2a², lisez, 2a³.
- p. 299, l. 7, $\frac{Au}{u}$, lisez, $\frac{Au}{a}$. lig. dern.
- $\frac{nqAu}{a}$ =, lisez, $\frac{nqAu}{a} +$.
- p. 301, l. 11, ERM, lisez, E M. l. 17, me-
- nez CB, lisez, menez DG. à la marge,
- Fig. 337. lisez, Fig. 337. N. 2. l. 25, ce
- cas, lorsque, lisez, le cas où.
- p. 302, art. 912. l. 11, $\frac{3}{2} CV$, lisez, $\frac{3}{2} CV^2$.
- p. 304, l. 5, dans un, lisez, en prenant le.

p. 305, art. 916. l. 14, en A, lisez, en V.
 p. 307, l. 18, $\sqrt{4}$, lisez, $\sqrt[3]{4}$. l. 27, droite, ajoutez, C B.
 p. 310, l. 3¹, lisez, $\frac{1}{2}$.
 p. 317, l. 19, us, lisez, us.
 p. 318, l. 1, $(e \mp u)$ s, lisez, $(e \mp u)$ s. art.
 933. l. 3¹, s, lisez, s x.
 p. 319, l. 4, en montant, $c y^2 x$, lisez. B y x
 + C y² x.
 p. 320, l. 5, conique, ajoutez. produite. l.
 18, $c y^2 s^4$, lisez, $c y^2 s^4$.

Approbation du Censeur Royal.

J'AY lû par ordre de Monseigneur le Chancelier le *Traité des Fluxions* de M. Maclaurin, traduit de l'Anglois : un Ouvrage aussi sçavant que celui-ci ne peut être qu'infiniment utile à tous ceux qui désirent approfondir la plus sublime Géométrie. Fait à Paris ce 18 Juillet 1748.

MONTCARVILLE.

P R I V I L E G E D U R O Y.

LOUIS, par la Grace de Dieu, Roy de France & de Navarre: A nos amés & féaux Conseillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand Conseil, Prevôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils & autres nos Justiciers qu'il appartiendra, SALUT. Notre bien amé CHARLES-ANTOINE JOMBERT, Libraire à Paris. Nous a fait exposer qu'il désireroit faire imprimer & donner au Public des ouvrages qui ont pour titre : *Le Guide des Jeunes Mathématiciens*, traduit de l'Anglois, par le R. P. Pezenas, Jésuite. *Nouveau Traité du Microscope*, mis à la portée de tout le monde, traduit de l'Anglois. *Traité des Fluxions & Traité d'Algebre*, par Colin Maclaurin. *Nouveau Tarif de la Menuiserie*, avec les détails & les prix de tous les ouvrages de Menuiserie. *La Mécanique du Feu*, ou *Traité de la Construction des nouvelles Cheminées*, par M. Gauger. *Principes de Physique rapportés à la Médecine*, & *Traité des Métaux & des Minéraux*, par M. Chambon, Médecin du Roy. *Nouvelle explication du Flux & Reflux de la Mer*, suivant un nouveau système de Cosmographie & de Physique générale. *Traité de Perspective à l'usage des Artistes*, démontré géométriquement, par M. Jaurat. *Traité Analytique des Sections Coniques, Fluxions & Fluents*, par M. Muller. *L'Ingenieur de Campagne*, ou *Traité de la Fortification*, par M. le Chevalier de Clairac. *Petit Dictionnaire Universel*, abrégé & mis à la portée des personnes qui n'ont point d'étude, par Thomas Dyche, traduit de l'Anglois, *L'Historien Chronologique*, ou *L'Histoire d'Angleterre*, depuis son origine jusqu'à présent, traduit de l'Anglois de M. Salmon ; S'il nous plaîtoit lui accorder nos Lettres de Privilège pour ce nécessaires. A CES CAUSES, voulant favorablement traiter l'Exposant, Nous lui avons permis & permettons par ces Présentes, de faire imprimer lesdits Ouvrages en un ou plusieurs volumes, & autant de fois que bon lui semblera, & de les vendre, faire vendre & débiter par tout notre Royaume pendant le tems de neuf années consécutives, à compter du jour de la date desdites Présentes : faisons défenses à toutes personnes de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangère dans aucun lieu de notre

obéissance, comme aussi à tous Libraires & Imprimeurs d'imprimer, ou faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter ni contrefaire lesdits Ouvrages, ni d'en faire aucuns Extraits sous quelque prétexte que ce soit, d'augmentation, correction, changement ou autres, sans la permission expresse & par écrit dudit Exposant ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiscation des Exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des Contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, l'autre tiers audit Exposant, ou à celui qui aura droit de lui, & de tous dépens, dommages & intérêts; à la charge que ces Présentes seront enregistrées tout au long sur le Registre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, dans trois mois de la date d'icelles; que l'impression dudit Ouvrage sera faite dans notre Royaume & non ailleurs, en bon papier & beaux caractères, conformément à la feuille imprimée & attachée pour modèle, sous le contre-Scel desdites Présentes; que l'Impétrant se conformera en tout aux Réglemens de la Librairie, & notamment à celui du 10 Avril 1725, qu'avant de l'exposer en vente, les Manuscrits qui auront servi de copie à l'Impression desdits Ouvrages, seront remis dans le même état où l'Approbation y aura été donnée, es mains de notre très-cher & féal Chevalier le Sieur Daguesseau, Chancelier de France, Commandeur de nos Ordres; & qu'il en sera ensuite remis deux Exemplaires de chacun dans notre Bibliothèque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notre très-cher & féal Chevalier le Sieur Daguesseau, Chancelier de France, Commandeur de nos Ordres; le tout à peine de nullité des Présentes. Du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir l'Exposant ou ses ayans cause, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons que la copie desdites Présentes qui sera imprimée tout au long au commencement ou à la fin dudit Ouvrage, soit tenue pour dûment signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conseillers & Secrétaires, soyent ajoutées comme à l'original. Commandons au premier notre Huissier ou Sergent, de faire pour l'exécution d'icelles, tous Actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant clameur de Haro, Charte Normande, & Lettres à ce contraire. CAR tel est notre plaisir. DONNE' à Paris le 14^e jour du mois d'Avril l'An de Grace mil sept cens quarante-neuf, & de notre Règne le trente-quatrième. Par le Roy en son Conseil.

SAINSON.

Registré sur le Registre XII. de la Chambre Royale & Syndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris, N°. 160. fol. 160. conformément aux anciens Réglemens, confirmés par celui du 28 Février 1723. A Paris le 16 May 1749.

Signé, G. CAVELIER, Syndic.

